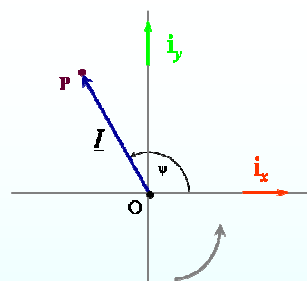
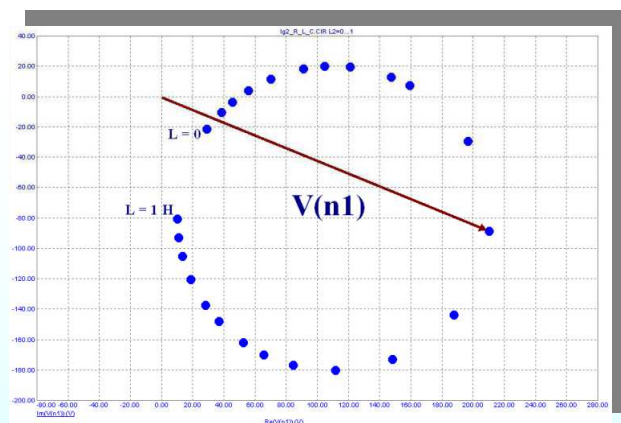
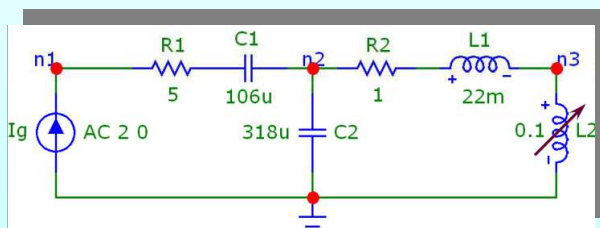


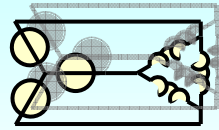
Теорија електричних кола на Енергетском одсеку



Користите само материјале које вам достави и препоручи предметни наставник у текућој школској години.



Дејан Тошић



Кружни дијаграми

временски непроменљивих, линеарних,
електричних кола са устаљеним
простопериодичним одзивом

Шта је кружни дијаграм?

- Кружни дијаграм је геометријско место тачака у равни које описује врх **фазора** напона или струје када се један од **параметара** електричног кола, или **учестаност**, мења.
- Овакво геометријско место тачака је, по правилу, део **кружнице**, али може у посебним случајевима бити и део **праве**.



Претпоставке

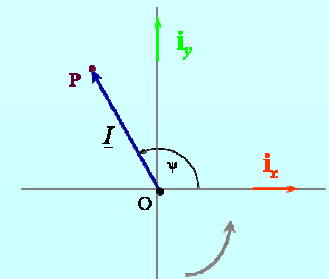
- Посматраћемо линеарна електрична кола са константним параметрима, која се не мењају у времену.
- Сматраћемо да је одзив устаљен и простопериодичан.
- Претпоставићемо да у колу постоји само један извор (независан напонски или струјни генератор).

Променљиви параметри

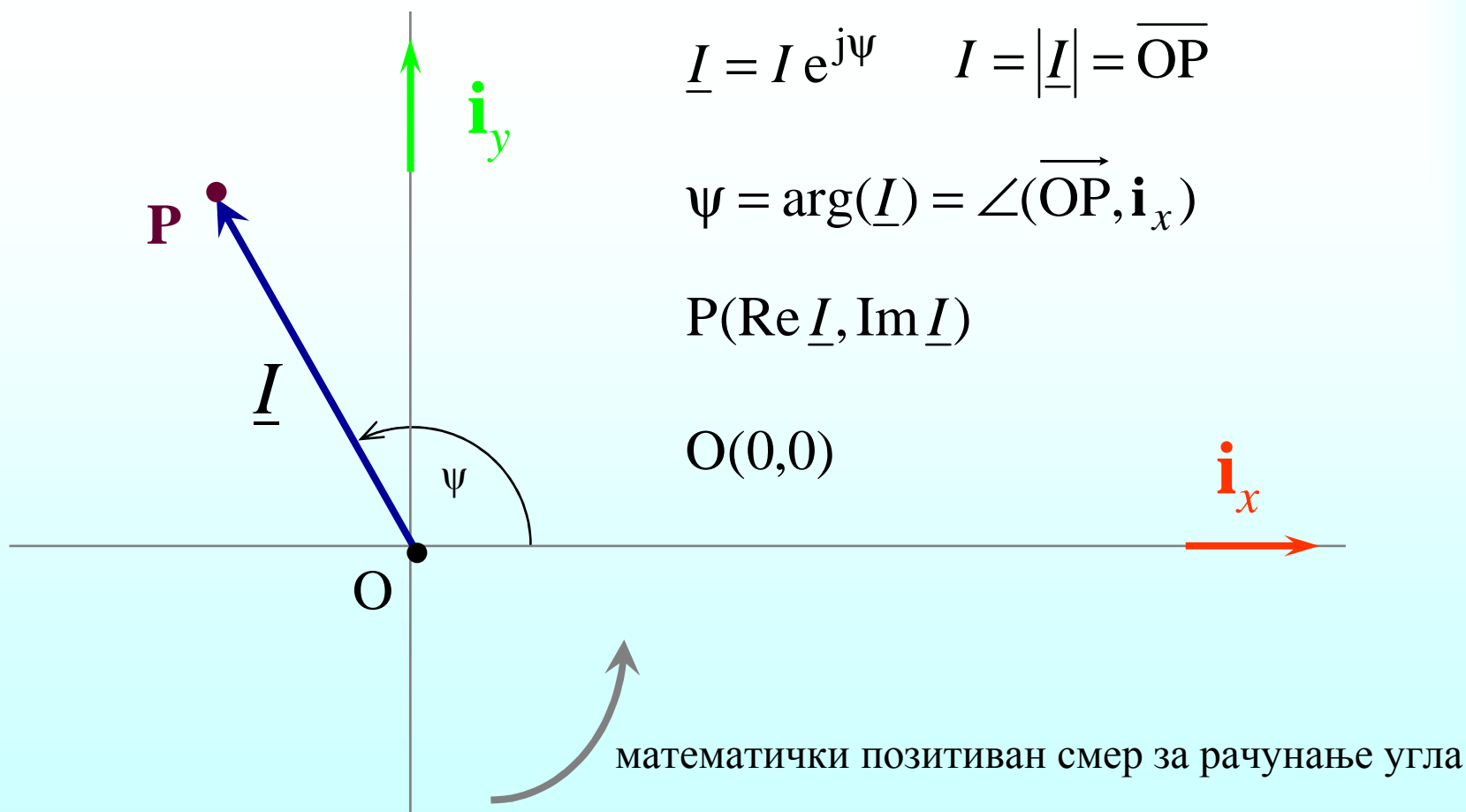
- Нека се мења (1) неки од параметара, вредности елемената, R [Ω], L [H], C [F] електричног кола, или (2) учестаност f [Hz] односно кружна учестаност ω [rad/s].
- Параметри и учестаност су скалари, **реални** ненегативни бројеви, тако да их посматрамо на делу реалне осе, у коначном интервалу, или на целој полуоси $[0, \infty)$.
- Промена параметра или учестаности условљава **промену** напона и струја приступа, потенцијала чворова, и одговарајућих **фазора**.

Фазор, тачка у комплексној равни, вектор у комплексној равни

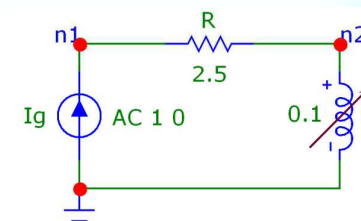
- Фазор, као резултат фазорске трансформације је **комплексан број**.
- Комплексан број – фазор – можемо нацртати као **тачку** у равни, коју зовемо *комплексна раван*, у Декартовом координатном систему, тако што реални део фазора наносимо на апсцису (x -осу) а његов имагинарни део наносимо на ординату (y -осу).
- Тачки у комплексној равни можемо придружити **вектор** усмерен **ка** тачки, чији је почетак у координатном почетку а крај (стрелица) у тачки. Модул вектора је једнак модулу фазора а вектор заклапа са апсцисом (реалном осом) угао једнак аргументу фазора.



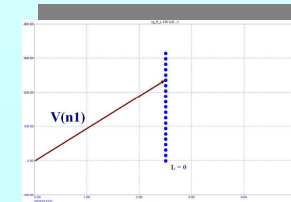
Представљање фазора



Редно RL коло

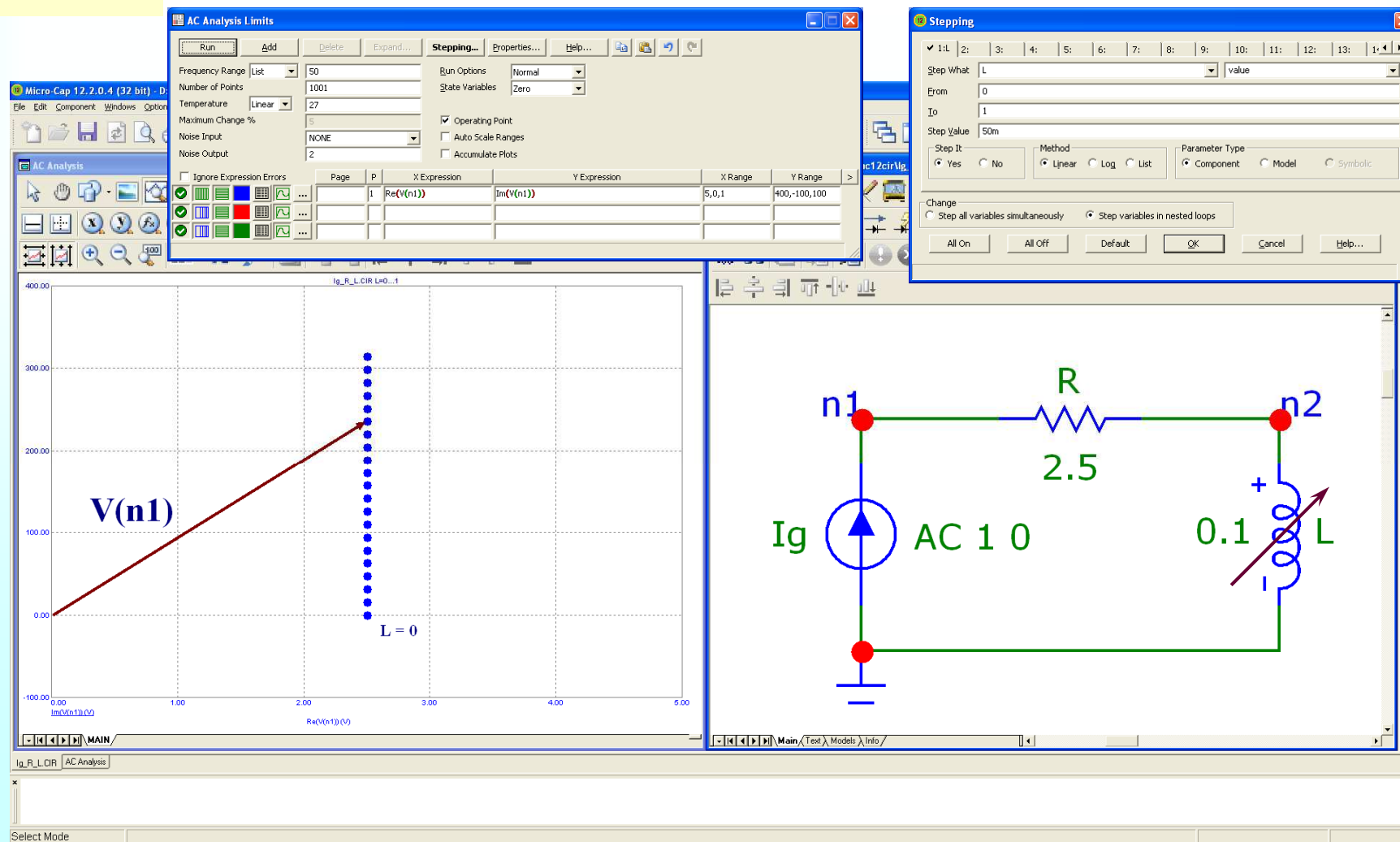


- Посматрајмо **просто** редно коло од отпорника и калема напајано струјним извором.
- Нека се **индуктивност** калема **мења** од нуле до неке вредности.
- Нацртајмо фазор **напона** струјног извора у комплексној равни.
- Користимо рачунарски програм за симулацију електричних кола.
- Наслућујемо на основу резултата симулације да врх вектора – фазора – описује део **праве**.



Симулација редног RL кола

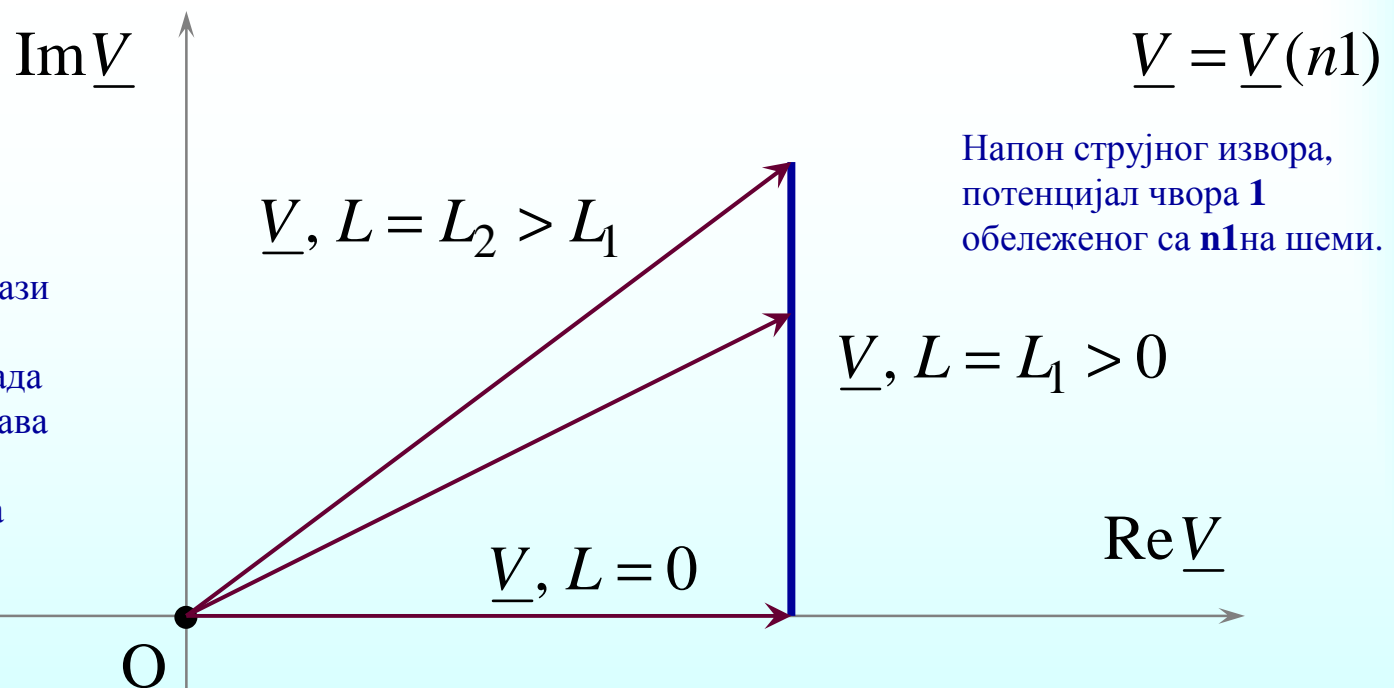
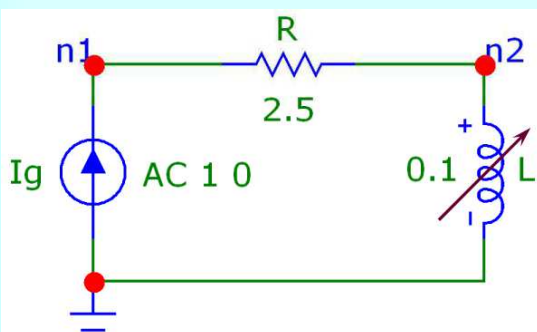
$f = 50 \text{ Hz}$



Линијски дијаграм RL кола

$$R = const$$

Какав је утицај промене **индуктивности**? За $L = 0$, односно $X_L = 0$, коло је резистивно па је напон у фази са струјом. Са повећањем индуктивности, односно када се $X_L = \omega L$ повећава, повећава се имагинарна компонента напона. Врх фазора напона описује део **праве** линије.



$$\underline{V} = \underline{V}(n1)$$

Напон струјног извора, потенцијал чвора **1** обележеног са **n1** на шеми.

$$\underline{V}, L = L_1 > 0$$

$$\underline{V}, L = 0$$

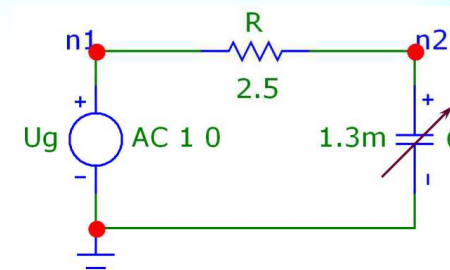
$$\text{Re } \underline{V}$$

$$\underline{I}_g = I_g \angle \psi_g$$

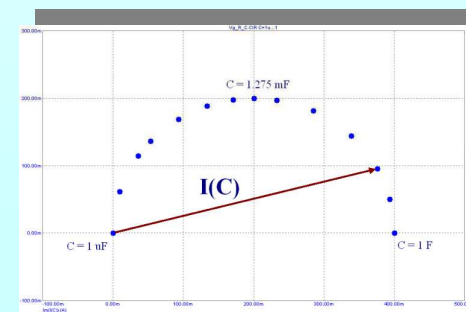
математички позитиван смер за рачунање угла

Ако је **отпорност** променљива, онда је линијски дијаграм део **праве** паралелне реалној оси (оси реалног дела фазора).

Редно RC коло

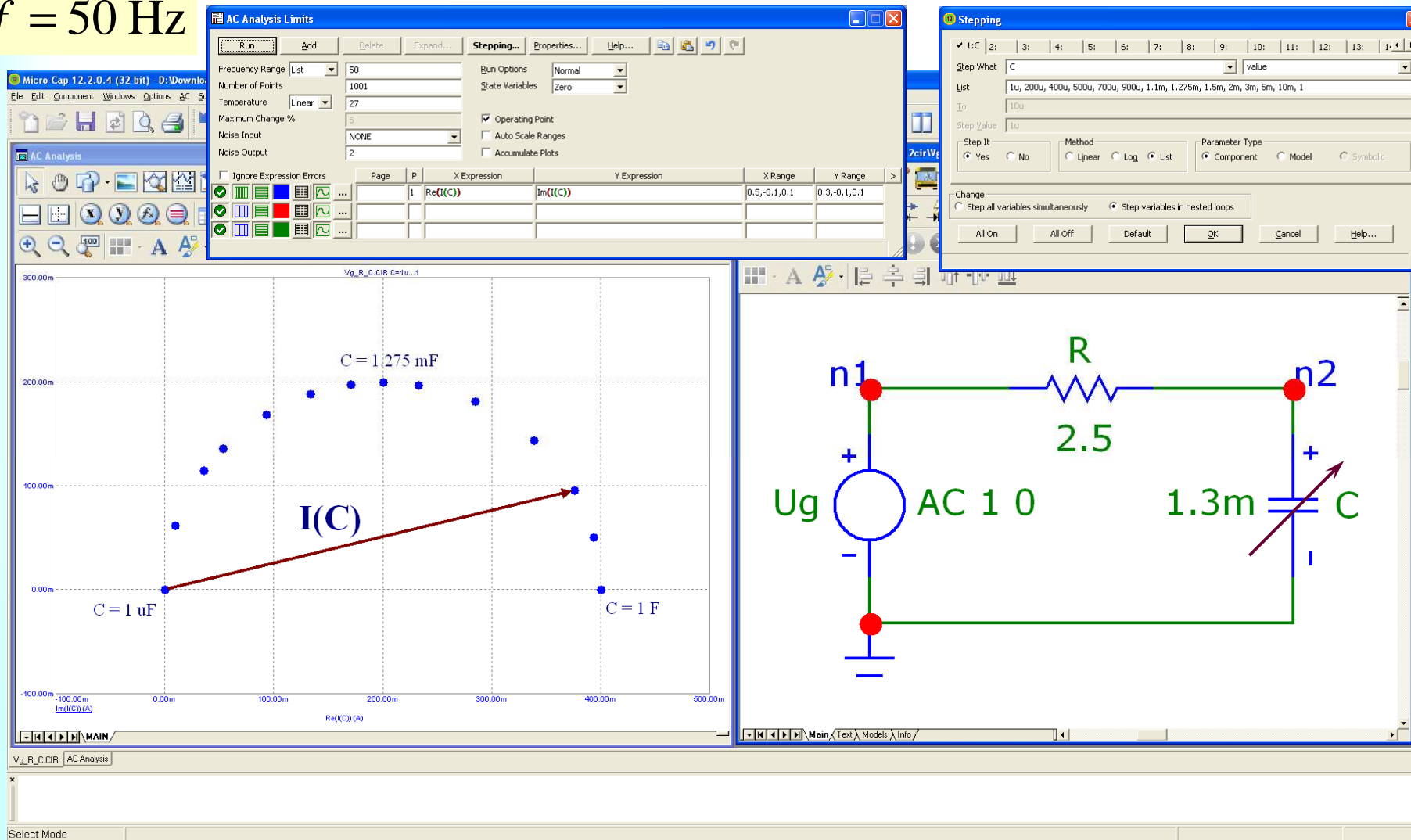


- Посматрајмо **просто** редно коло од отпорника и кондензатора напајано напонским извором.
- Нека се **капацитивност** кондензатора **мења** од неке мале до неке велике вредности.
- Нацртајмо фазор **струје** напонског извора у комплексној равни.
- Користимо рачунарски програм за симулацију електричних кола.
- Наслућујемо на основу резултата симулације да врх вектора – фазора – описује део **кружнице** која пролази кроз координатни почетак.



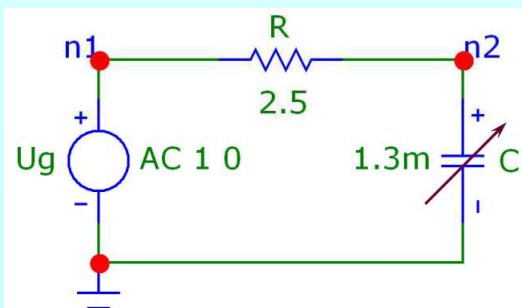
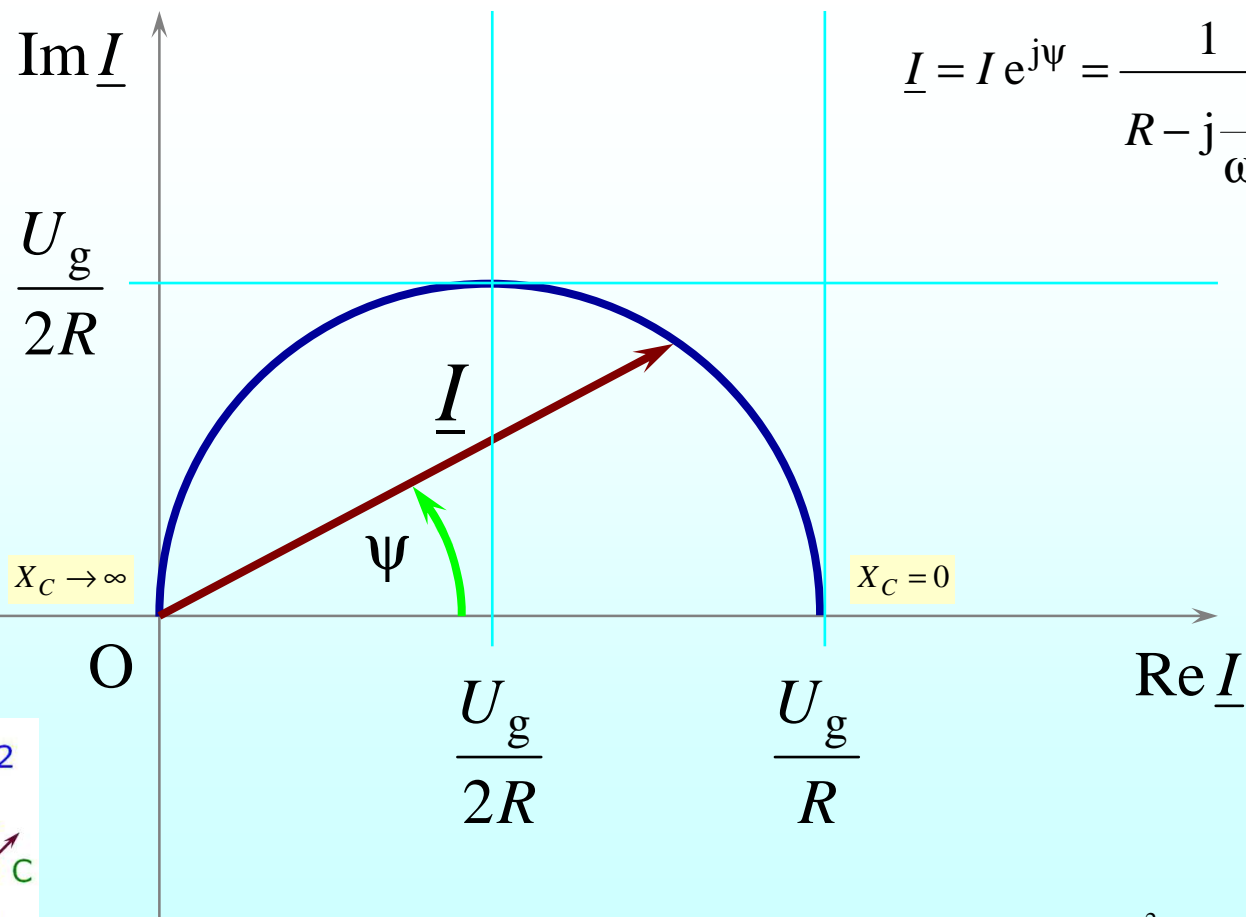
Симулација редног RC кола

$f = 50 \text{ Hz}$



Кружни дијаграм RC кола

Са фазорског дијаграма можемо уочити за коју вредност параметра реални део струје достиже максимум и тиме максимизира средњу (активну) снагу.



$$(x - p)^2 + (y - q)^2 = r^2$$

Једначина круга у равни.

Анализа RC кола

У редном колу од отпорника и кондензатора, са напонским извором, струја је

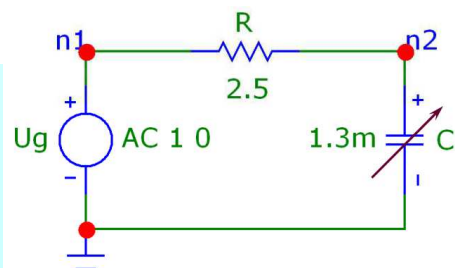
$$\underline{I} = \frac{1}{R - jX_C} \underline{U}_g, \quad X_C = \frac{1}{\omega C} > 0. \text{ Ради једноставности анализе, не умањујући општост}$$

резултата, претпостављамо $\underline{U}_g = U_g e^{j0} = U_g + j0$. Конструиримо кружни дијаграм струје када се један од параметара мења. Параметар може бити отпорност R , капацитивност C , или модул реактансе кондензатора X_C , и параметар је ненегативан.

Са гледишта аналитичке геометрије у равни треба да нађемо једначину криве $F(x, y) = 0$ и препознамо која је то крива. Радимо у Декартовом координатном систему, са x обележавамо вредности апсцисе (реални део фазора), а са y вредности ординате (имагинарни део фазора).

$$\underline{I} = \frac{R + jX_C}{R^2 + X_C^2} U_g, \quad x = \operatorname{Re} \underline{I} = \frac{R}{R^2 + X_C^2} U_g, \quad y = \operatorname{Im} \underline{I} = \frac{X_C}{R^2 + X_C^2} U_g, \quad x^2 + y^2 = \frac{1}{R^2 + X_C^2} U_g^2,$$

$$x/y = R/X_C.$$



Кругови RC кола

Ако се мења отпорност, а капацитивност је константна, онда елиминишемо R и једначина

криве је $x^2 + y^2 = y \frac{U_g}{X_C}$, $x^2 + \left(y - \frac{U_g}{2X_C}\right)^2 = \left(\frac{U_g}{2X_C}\right)^2$. Ово је једначина круга у равни,

полупречника $\frac{U_g}{2X_C}$, са центром на y -оси у тачки $(0, \frac{U_g}{2X_C})$. Кружни дијаграм је полукруг

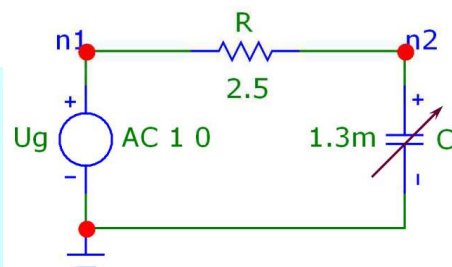
који пролази кроз координатни почетак.

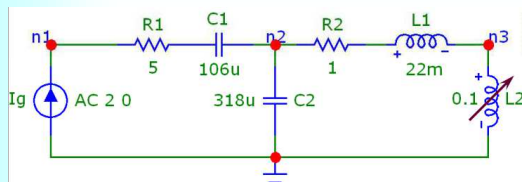
Ако се мења капацитивност, а отпорност је константна, онда елиминишемо X_C и једначина

криве је $\left(x - \frac{U_g}{2R}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{U_g}{2R}\right)^2$. Ово је једначина круга у равни, полупречника $\frac{U_g}{2R}$, са

центром на x -оси у тачки $(\frac{U_g}{2R}, 0)$. Кружни дијаграм је полукруг који пролази кроз

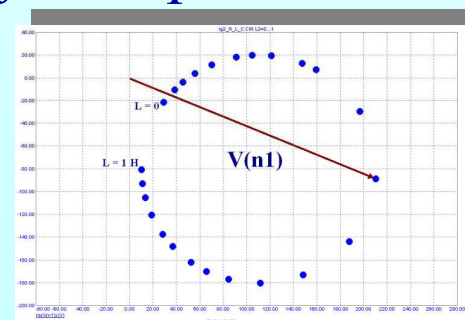
координатни почетак.





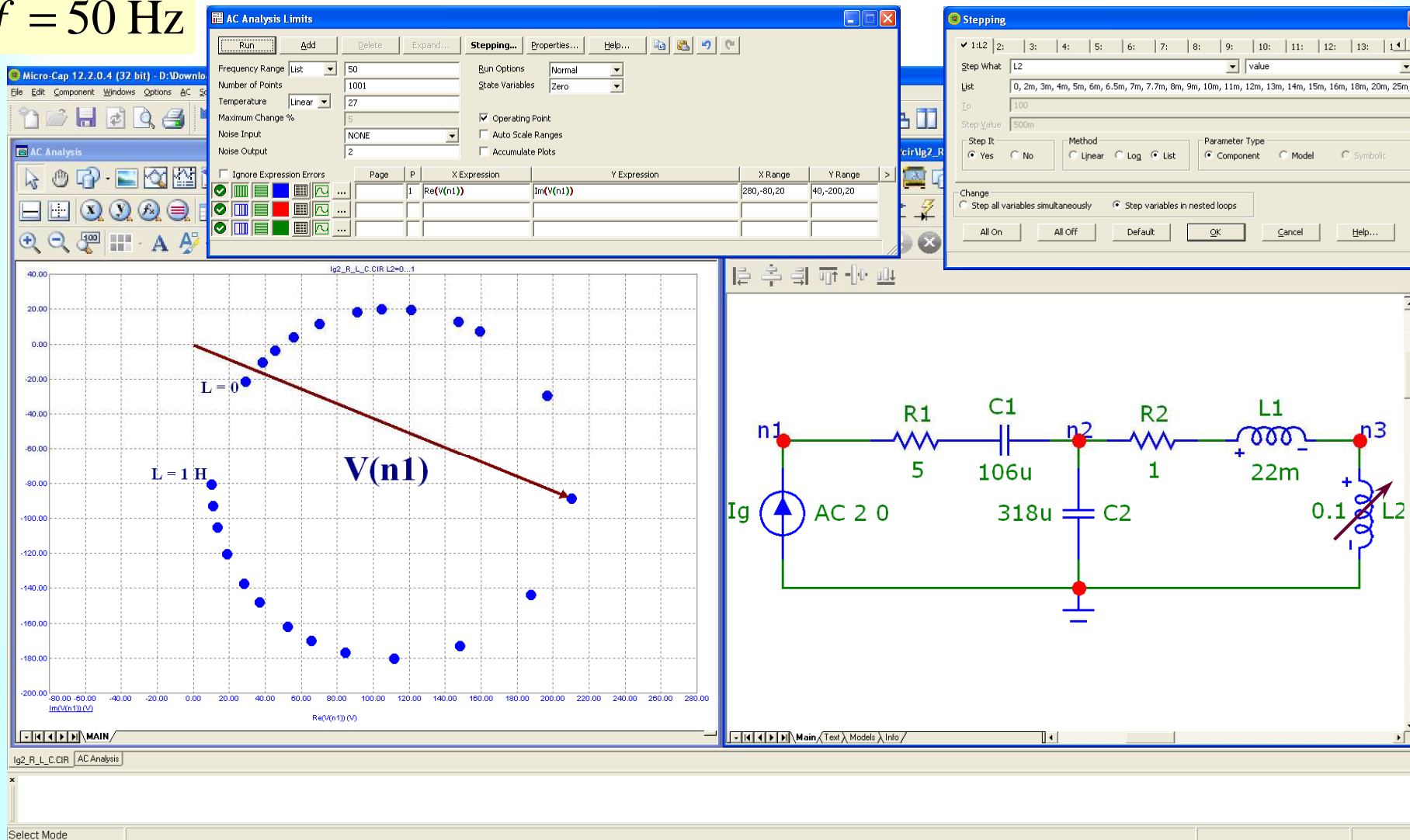
Сложено коло

- Посматрајмо **сложеније** коло од отпорника, калемова и кондензатора напајано струјним извором.
- Нека се **индуктивност** једног калема **мења** од нуле до неке релативно велике вредности.
- Нацртајмо фазор **напона** струјног извора у комплексној равни.
- Користимо рачунарски програм за симулацију електричних кола.
- Наслућујемо на основу резултата симулације да врх вектора – фазора – описује део **кружнице**.



Симулација сложеног кола

$f = 50 \text{ Hz}$



Анализа сложеног кола

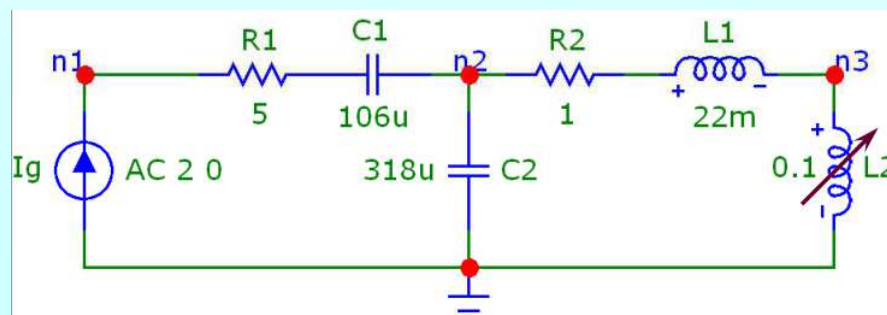
Напон струјног извора, потенцијал чвора 1, који је обележен на шеми са n1, је

$$\underline{V} = \underline{Z}_1 \underline{I}_g + \frac{(\underline{Z}_2 + jX_{L2})\underline{Z}_3}{\underline{Z}_2 + jX_{L2} + \underline{Z}_3} \underline{I}_g, \text{ где је } \underline{Z}_1 = R_1 + \frac{1}{j\omega C_1}, \underline{Z}_2 = R_2 + j\omega L_1, X_{L2} = \omega L_2, \underline{Z}_3 = \frac{1}{j\omega C_2},$$

$$\underline{I}_g = I_g e^{j\psi_g}. \text{ Конкретно, } f = 50 \text{ Hz, } \omega = 2\pi f, \underline{Z}_1 = (5 - j30) \Omega, \underline{Z}_2 = (1 + j7) \Omega, \underline{Z}_3 = -j10 \Omega, \\ I_g = 2 \text{ A, } \psi_g = 0.$$

Напон \underline{V} је израз облика $\underline{V} = \frac{\underline{c}_1 + \underline{c}_2 X_{L2}}{\underline{c}_3 + \underline{c}_4 X_{L2}}$, где је X_{L2} реална ненегативна променљива, а

остали симболи представљају комплексне константе ($\underline{c}_1, \underline{c}_2, \underline{c}_3, \underline{c}_4 = const$).



Тражени напон сложеног кола

Подеснији облик за анализу је $\underline{V} = \underline{V}_{\text{inf}} + \frac{\underline{V}_0 - \underline{V}_{\text{inf}}}{1 + m e^{j\mu}}$, ($\underline{V}_0, \underline{V}_{\text{inf}}, \mu = \text{const}$), у коме је уведена

реална ненегативна променљива $m = kX_{L2}$, $k = \text{const}$, $k > 0$. Очигледно, $\underline{V}_{\text{inf}} = \lim_{m \rightarrow \infty} \underline{V}$,

$\underline{V}_0 = \lim_{m \rightarrow 0} \underline{V}$, као и форма $\underline{V} = \underline{V}_{\text{inf}} + \underline{V}_{\text{var}}(m)$, $\underline{V}_{\text{var}}(m) = \frac{\underline{V}_0 - \underline{V}_{\text{inf}}}{1 + m e^{j\mu}}$. Када се мења m , мења се

фазор $\underline{V}_{\text{var}}(m)$ и његов врх описује криву у комплексној равни. Та крива се транслира додавањем фазора $\underline{V}_{\text{inf}}$.

Константни фазори $\underline{V}_0, \underline{V}_{\text{inf}}$ су конкретни комплексни бројеви и можемо израчунати

$\underline{V}_{\text{inf}} = a + jb$, $\underline{V}_0 - \underline{V}_{\text{inf}} = c + jd$, где су a, b, c, d реалне константе. Увођењем $\underline{V} = x + jy$,

можемо одредити криву $F(x, y) = 0$ коју описује \underline{V} . Та крива је круг $(x - p)^2 + (y - q)^2 = r^2$,

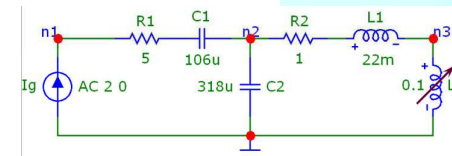
$p = a + \frac{c - d \cot(\mu)}{2}$, $q = b + \frac{d + c \cot(\mu)}{2}$, $r = \frac{1}{2|\sin(\mu)|} \sqrt{c^2 + d^2}$, $\sin(\mu) \neq 0$. Ако је $\sin(\mu) = 0$,

онда круг дегенерише у праву зато што $(1 + m e^{j\mu})$ постаје реалан израз.

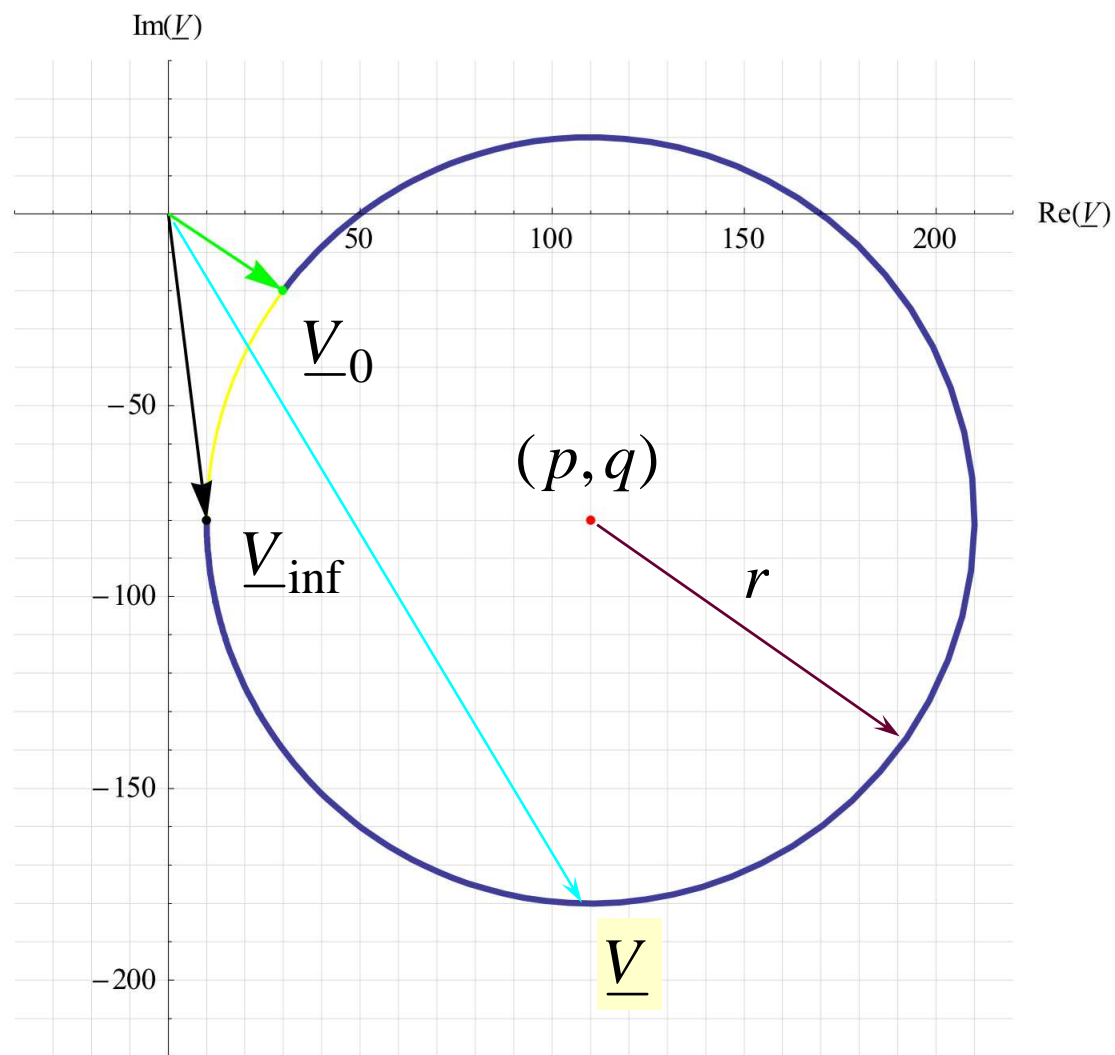
За вредности елемената из примера је $\underline{V}_{\text{inf}} = (10 - 80j) \text{ V}$, $\underline{V}_0 = (30 - 20j) \text{ V}$,

$\underline{V}_0 - \underline{V}_{\text{inf}} = (20 + 60j) \text{ V}$, $\mu = \pi - \text{arccot}(3) = 161.565^\circ$, $k = \frac{1}{\sqrt{10}} \frac{1}{\Omega}$, $p = 110 \text{ V}$, $q = -80 \text{ V}$,

$r = 100 \text{ V}$.



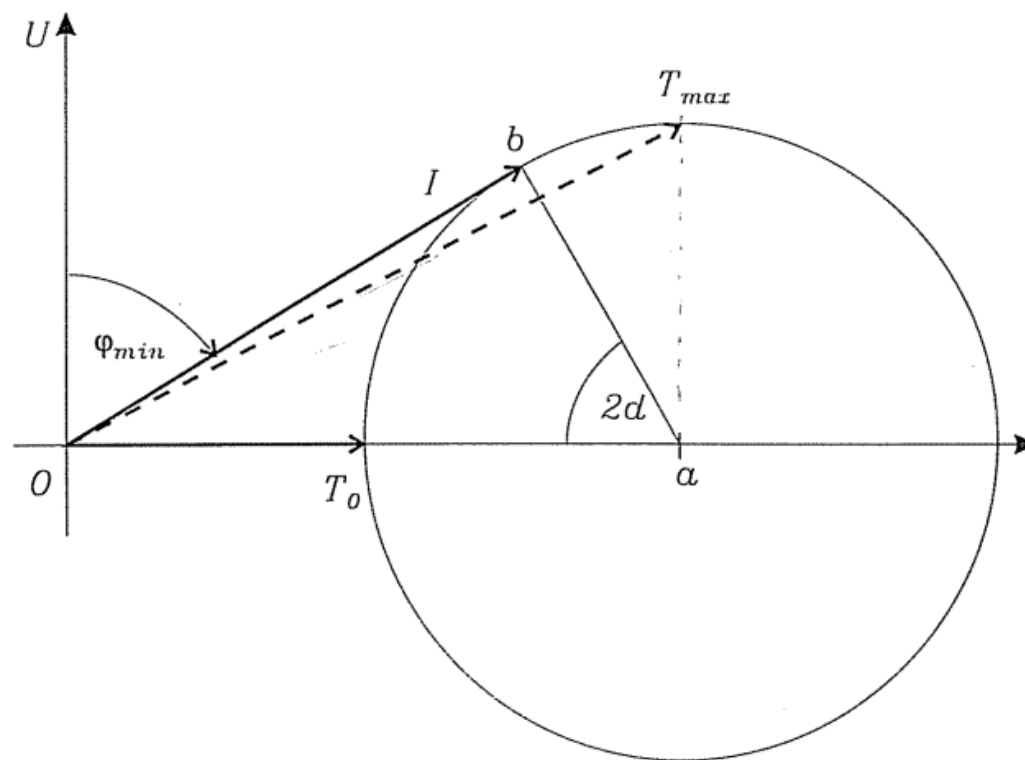
Кружни дијаграм сложеног кола



Значај кружних дијаграма

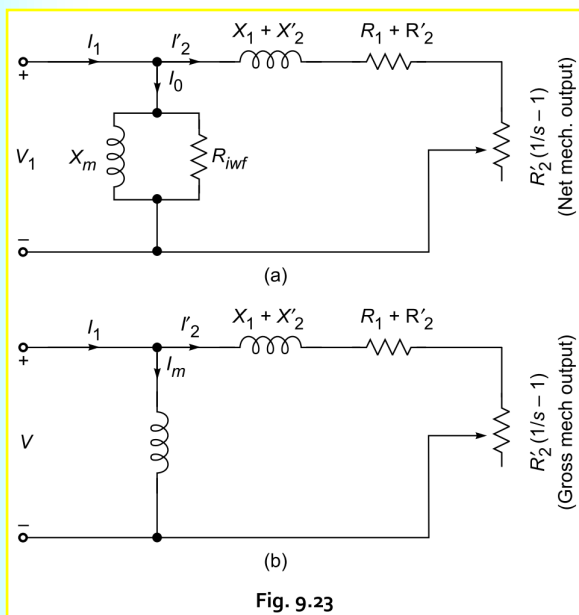
- Сажето сагледавање и визуелизација утицаја промене параметара електричног кола на понашање кола и перформансе.
- Примена у **електро-енергетици**, посебно у анализи **електричних машина**.
- Добијање увида у утицај параметара заменске шеме којом моделујемо направу или систем у **електро-енергетици**.
- Увид у **снаге** и њихове оптималне вредности, на пример када компонента у фази достиже максимум.
- Увид у максималне вредности напона и струја.
- Линеарни и кружни дијаграми помажу у **квалитативној** анализи различитих електричних кола.
- Корисни су у анализи електричних машина. Кружни дијаграм **индукционе машине** даје увид у понашање машине у различитим начинима рада.

Dr Zoran Lazarević, *Električne mašine*, zbirka rešenih ispitnih zadataka, Elektrotehnički fakultet, Beograd, 2000.

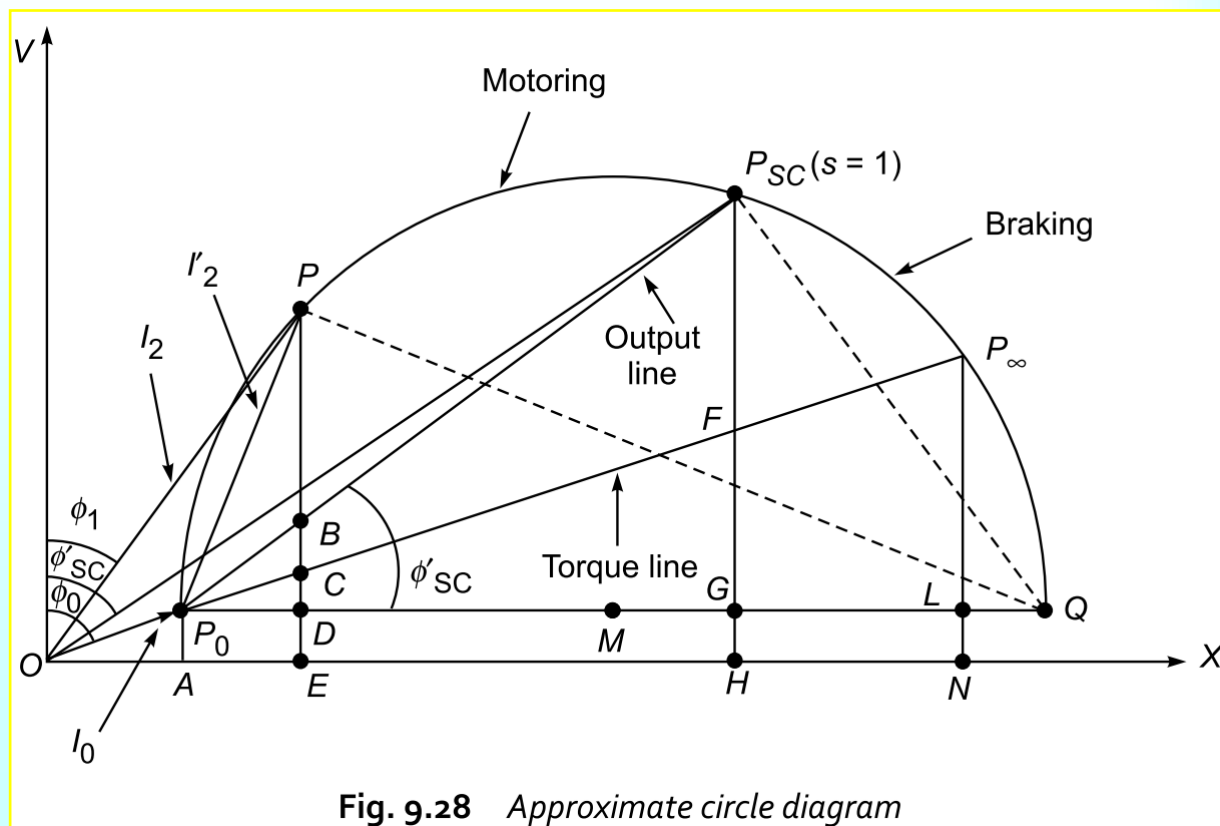


Slika 3.12.1 Kružni dijagram struje reluktantnog motora

D. P. Kothari, I. J. Nagrath, *Electric Machines*, 4/e,
McGraw-Hill, 2010. ISBN (13): 978-0-07-069967-0



Ch. 9. Induction Machine,
9.7 The Circle Diagram,
pp. 630 – 638.



In[1]:= $\$Assumptions = \{ \{a, b, c, d, x, y, m, \mu\} \in \text{Reals}, XL2 > 0 \}$

Out[1]= $\{ (a | b | c | d | x | y | m | \mu) \in \text{Reals}, XL2 > 0 \}$

In[2]:= $eqn = V == Vinf + \frac{V0 - Vinf}{1 + m e^{i \mu}}$

Out[2]= $V == \frac{V0 - Vinf}{1 + e^{i \mu} m} + Vinf$

In[3]:= $eqnLeft = First[eqn]$

Out[3]= V

In[4]:= $eqnRight = Last[eqn]$

Out[4]= $\frac{V0 - Vinf}{1 + e^{i \mu} m} + Vinf$

In[5]:= $eqnRightdDen = Denominator[eqnRight // Together]$

Out[5]= $1 + e^{i \mu} m$

In[6]:= $eqnSimp = (eqnLeft - eqnRight) eqnRightdDen // Simplify$

Out[6]= $V + e^{i \mu} m V - V0 - e^{i \mu} m Vinf$

In[7]:= $eqAlt = (V - Vinf) (1 + m e^{i \mu}) - (V0 - Vinf) // .$

$\{V \rightarrow x + i y, Vinf \rightarrow a + i b, V0 \rightarrow c + i d + Vinf\} // Expand$

Out[7]= $-a - i b - c - i d - a e^{i \mu} m - i b e^{i \mu} m + x + e^{i \mu} m x + i y + i e^{i \mu} m y$

In[8]:= $eq = eqnSimp /. V0 \rightarrow c + i d + Vinf /. \{V \rightarrow x + i y, Vinf \rightarrow a + i b\} // Expand$

Out[8]= $-a - i b - c - i d - a e^{i \mu} m - i b e^{i \mu} m + x + e^{i \mu} m x + i y + i e^{i \mu} m y$

In[9]:= $eqAlt == eq$

Out[9]= $True$

In[10]:= $eqRe = Re[eq] // ComplexExpand$

Out[10]= $-a - c + x - a m \cos[\mu] + m x \cos[\mu] + b m \sin[\mu] - m y \sin[\mu]$

In[11]:= $eqIm = Im[eq] // ComplexExpand$

Out[11]= $-b - d + y - b m \cos[\mu] + m y \cos[\mu] - a m \sin[\mu] + m x \sin[\mu]$

In[12]:= $xyEq = Eliminate[\{eqRe == 0, eqIm == 0\}, m]$

Out[12]= $-b c \cos[\mu] + c y \cos[\mu] - a^2 \sin[\mu] - b^2 \sin[\mu] - a c \sin[\mu] + 2 a x \sin[\mu] + c x \sin[\mu] - x^2 \sin[\mu] + 2 b y \sin[\mu] - y^2 \sin[\mu] == d (-a \cos[\mu] + x \cos[\mu] + b \sin[\mu] - y \sin[\mu])$

In[13]:= $Fxy = Collect\left[\frac{Last[xyEq]}{\sin[\mu]} - \frac{First[xyEq]}{\sin[\mu]}, \{x, y\}\right]$

Out[13]= $a^2 + b^2 + a c + b d + x^2 + y^2 + b c \cot[\mu] - a d \cot[\mu] + y (-2 b - d - c \cot[\mu]) + x (-2 a - c + d \cot[\mu])$

In[14]:= $TraditionalForm[Fxy]$

Out[14]//TraditionalForm=

$a^2 + x(-2 a - c + d \cot(\mu)) + a c - a d \cot(\mu) + b^2 + y(-2 b - c \cot(\mu) - d) + b c \cot(\mu) + b d + x^2 + y^2$


```
In[15]= {Coefficient[Fxy, x, 2], Coefficient[Fxy, y, 2]}
```

```
Out[15]= {1, 1}
```

```
In[16]= Bx = Coefficient[Fxy, x, 1]
```

```
Out[16]= -2 a - c + d Cot[μ]
```

```
In[17]= Cy = Coefficient[Fxy, y, 1]
```

```
Out[17]= -2 b - d - c Cot[μ]
```

```
In[18]= D0 = Fxy /. {x → 0, y → 0}
```

```
Out[18]= a2 + b2 + a c + b d + b c Cot[μ] - a d Cot[μ]
```

```
In[19]= p =  $\frac{-Bx}{2}$ 
```

```
Out[19]=  $\frac{1}{2} (2 a + c - d \cot[\mu])$ 
```

```
In[20]= q =  $\frac{-Cy}{2}$ 
```

```
Out[20]=  $\frac{1}{2} (2 b + d + c \cot[\mu])$ 
```

```
In[21]= r2 = p2 + q2 - D0 // Simplify
```

```
Out[21]=  $\frac{1}{4} (c^2 + d^2) \operatorname{Csc}[\mu]^2$ 
```

```
In[22]= {Csc[x] ==  $\frac{1}{\sin[x]}$ , Csc[x] ===  $\frac{1}{\sin[x]}$ , Csc[x] Sin[x]}
```

```
Out[22]= {True, True, 1}
```

```
In[23]= {p, q,  $\sqrt{r2}$ } // TraditionalForm
```

```
Out[23]/TraditionalForm=
```

$$\left\{ \frac{1}{2} (2 a + c - d \cot(\mu)), \frac{1}{2} (2 b + c \cot(\mu) + d), \frac{1}{2} \sqrt{(c^2 + d^2) \operatorname{csc}^2(\mu)} \right\}$$

```
In[24]= Ig = 2; Z1 = 5 - 30 i; Z2 = 1 + 7 i; Z3 = -10 i; V1 = Ig  $\left( Z1 + \frac{(Z2 + i XL2) Z3}{Z2 + i XL2 + Z3} \right)$  // Simplify
```

```
Out[24]=  $\frac{(-110 + 30 i) + (10 - 80 i) XL2}{(-3 - i) + XL2}$ 
```

```
In[25]= V1inf = Limit[V1, XL2 → ∞]
```

```
Out[25]= 10 - 80 i
```

```
In[26]= V10 = V1 /. XL2 → 0
```

```
Out[26]= 30 - 20 i
```

```
In[27]= V10inf = V10 - V1inf
```

```
Out[27]= 20 + 60 i
```

In[28]= $m\mu 1 = \frac{V10 - V1inf}{V1 - V1inf}$ // Simplify

Out[28]= $1 - \left(\frac{3}{10} - \frac{i}{10}\right)$ XL2

In[29]= $m\mu = m\mu 1 - 1$

Out[29]= $\left(-\frac{3}{10} + \frac{i}{10}\right)$ XL2

In[30]= $\mu 1 = \text{FullSimplify}[\text{Arg}[m\mu]]$

Out[30]= $\pi - \text{ArcCot}[3]$

In[31]= $\mu 1 \frac{180.}{\pi}$

Out[31]= 161.565

In[32]= $k = \frac{\text{Abs}[m\mu]}{\text{XL2}}$ // Simplify

Out[32]= $\frac{1}{\sqrt{10}}$

In[33]= $\text{zamena} = \{a \rightarrow \text{Re}[V1inf], b \rightarrow \text{Im}[V1inf], c \rightarrow \text{Re}[V10inf], d \rightarrow \text{Im}[V10inf], \mu \rightarrow \mu 1\}$

Out[33]= $\{a \rightarrow 10, b \rightarrow -80, c \rightarrow 20, d \rightarrow 60, \mu \rightarrow \pi - \text{ArcCot}[3]\}$

In[34]= $p1 = p /. \text{zamena}; q1 = q /. \text{zamena}; r1 = \sqrt{r2} /. \text{zamena}; \{p1, q1, r1\}$

Out[34]= $\{110, -80, 100\}$

```

In[35]= ParametricPlot[{Re[V1], Im[V1]}, {XL2, 0, 200},
  PlotStyle -> Thick, PlotRange -> {{-40, 220}, {40, -220}}, Epilog ->
  {Arrow[{{0, 0}, {Re[V1inf], Im[V1inf]}]}, Point[{{Re[V1inf], Im[V1inf]}]},
  Green, Arrow[{{0, 0}, {Re[V10], Im[V10]}]}, Point[{{Re[V10], Im[V10]}]}],
  Prolog -> {Red, Point[{{p1, q1}]}, Yellow, Circle[{{p1, q1}, r1}],
  GridLines -> {Range[-30, 210, 10], Range[30, -210, -10]},
  GridLinesStyle -> LightGray, AxesLabel -> {"Re(V)", "Im(V)"}]

```

