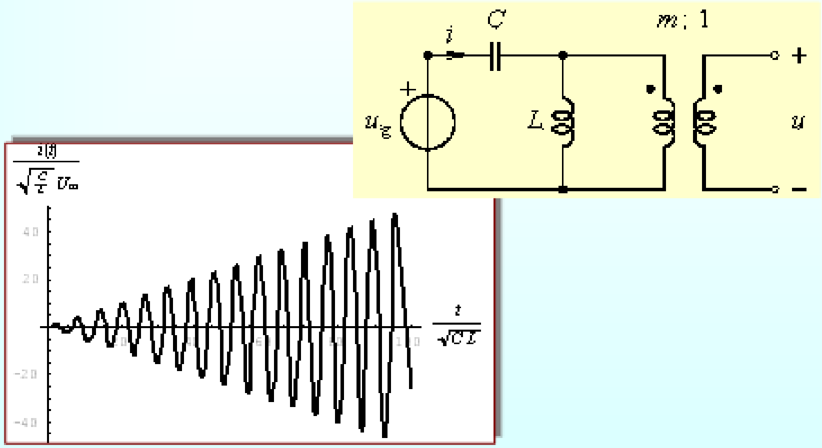
Теорија електричних кола

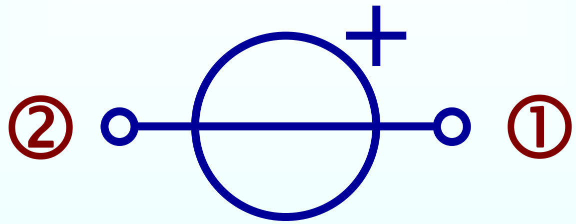


Милка Потребић

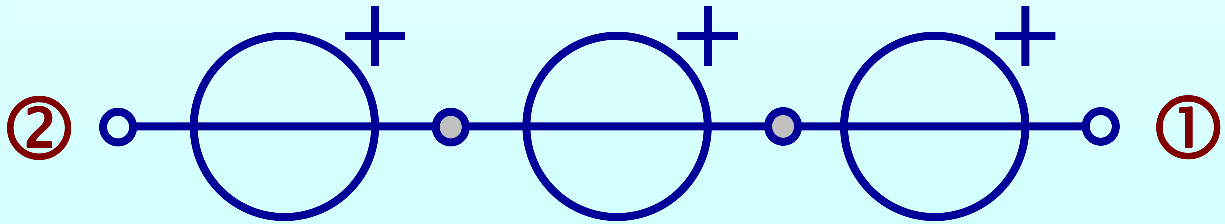
Суперпозиција устаљеног одзива

временски непромењивог линеарног ел. кола са више извора

Заменски напонски извори сложених побуда

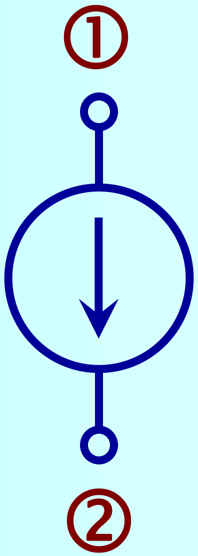


$$u_g = u_{g1} + u_{g2} + u_{g3}$$

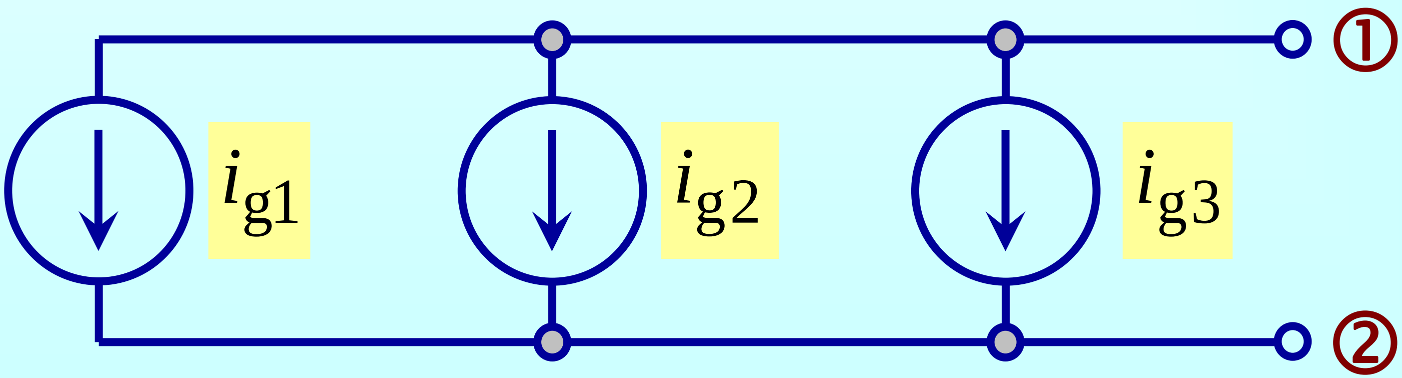


u_{g1} u_{g2} u_{g3}

Заменски струјни извори сложених побуда

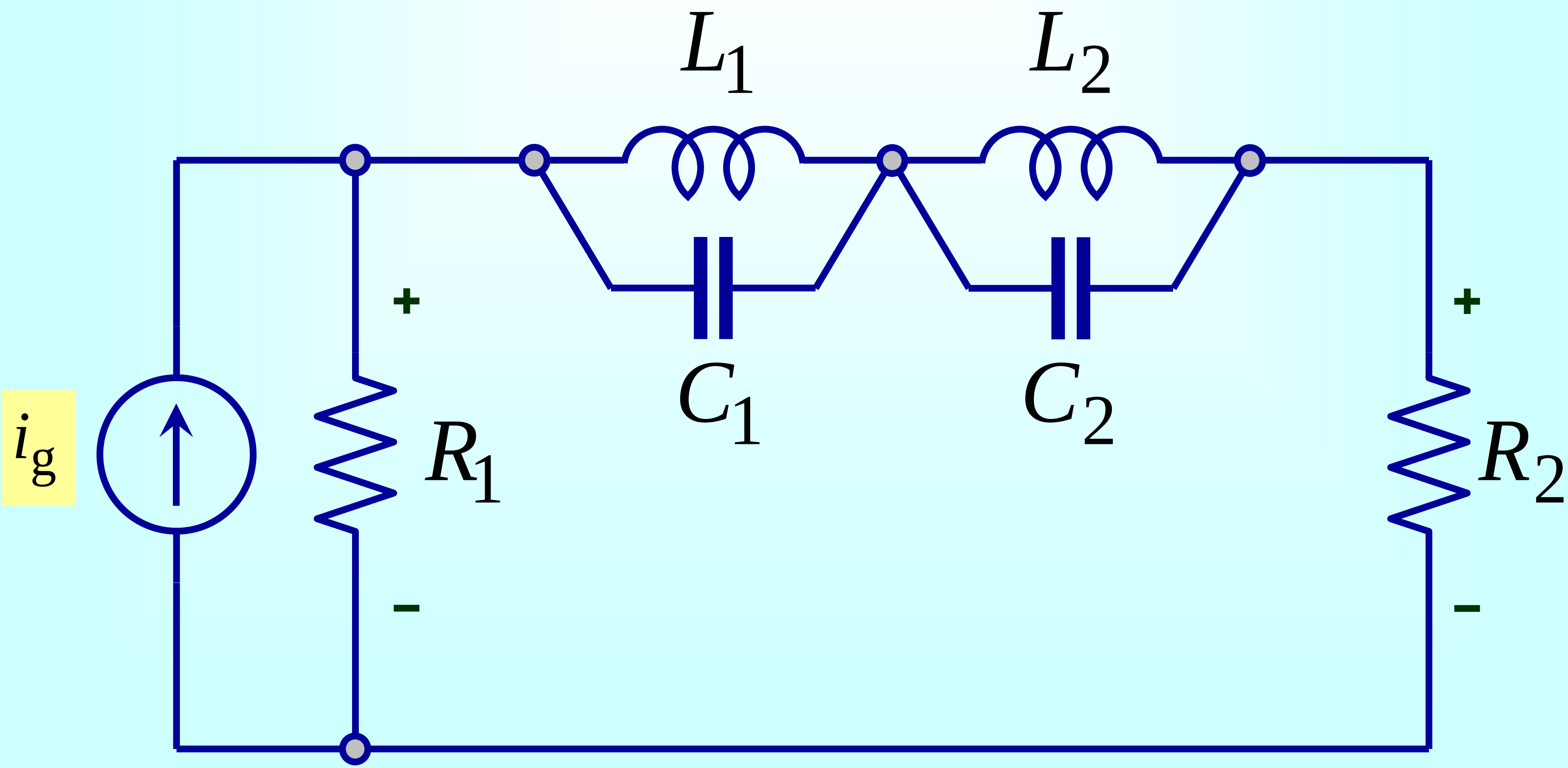


$$i_g = i_{g1} + i_{g2} + i_{g3}$$



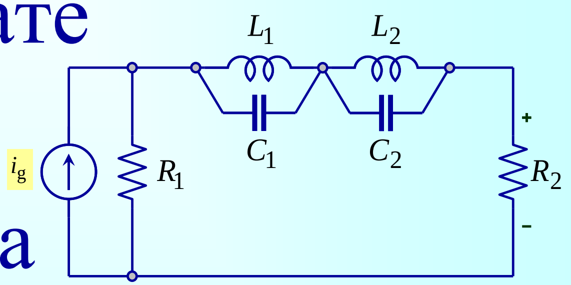
i_{g1} i_{g2} i_{g3}

Пример суперпозиције устаљеног одзива



Одредити напоне отпорника R_1 и R_2

- Сматрати да је одзив устаљен
- Вредности елемената су познате
- Побуда је збир константе и два простопериодична сабирка
- Параметри побуде су познати

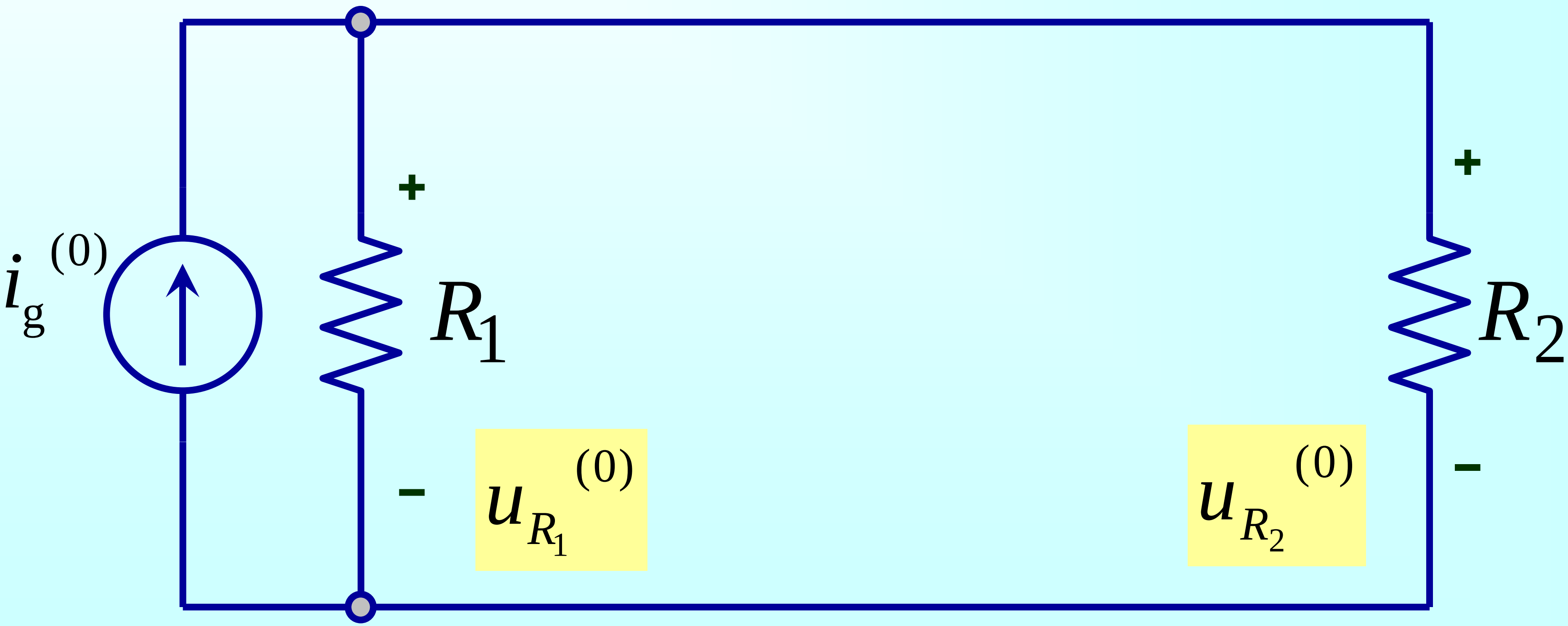


$$i_g = I + I\cos\left(\frac{1}{2\sqrt{CL}}t\right) + I\sin\left(\frac{1}{\sqrt{CL}}t\right)$$

$$C_1 = C, C_2 = 2C, L_1 = L, L_2 = 2L, R_1 = R, R_2 = 2R$$

Устаљен сталан (константан) одзив

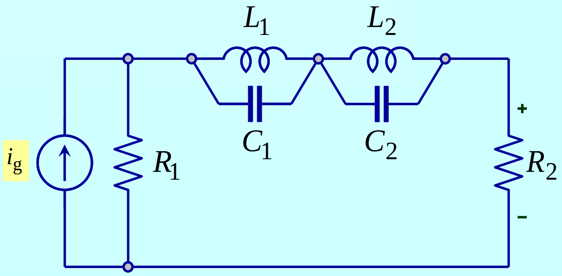
DC Analysis $i_g^{(0)} = I$

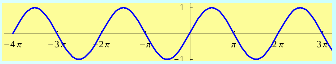


Напон устаљеног сталног (константног) одзива

DC Analysis (0)

$$u_{R_1}{}^{(0)} = u_{R_2}{}^{(0)} = I\,\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = \frac{2}{3} R I$$

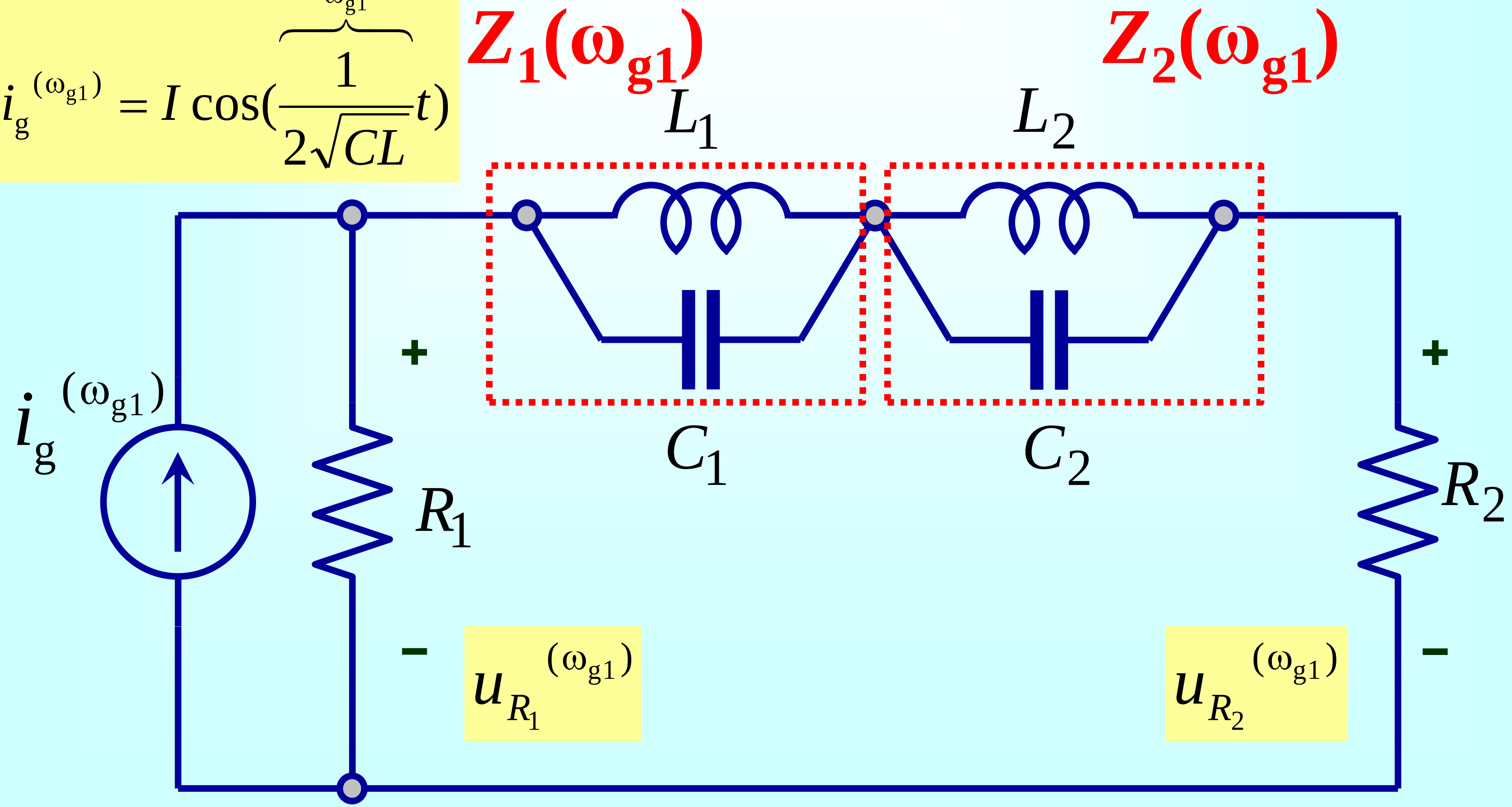




Устаљен простопериодичан одзив прве побуде

AC Analysis (1)

$$i_{\mathrm{g}}^{(\omega_{\mathrm{g1}})} = I\cos(\overbrace{\frac{1}{2\sqrt{CL}}}^{\omega_{\mathrm{g1}}}t)$$



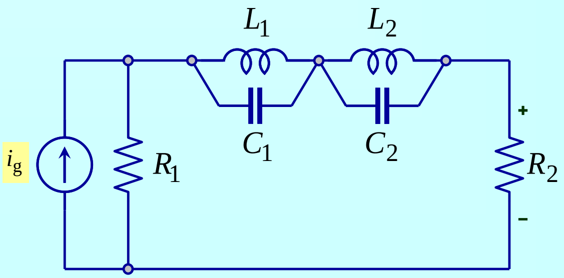
Напон УППО прве побуде

$$\underline{Z}_1^{(\omega_{g1})}=\frac{j\omega_{g1}L_1\dfrac{1}{j\omega_{g1}C_1}}{j\omega_{g1}L_1+\dfrac{1}{j\omega_{g1}C_1}}=\frac{j\omega_{g1}L_1}{-\omega_{g1}^2L_1C_1+1}=\frac{j\dfrac{1}{2\sqrt{LC}}L}{-\dfrac{1}{4LC}LC+1}=-j\frac{2}{3}\sqrt{\frac{L}{C}}$$

$$\underline{Z}_2^{(\omega_{g1})}=\frac{j\omega_{g1}L_2\dfrac{1}{j\omega_{g1}C_2}}{j\omega_{g1}L_2+\dfrac{1}{j\omega_{g1}C_2}}=\frac{j\omega_{g1}L_2}{-\omega_{g1}^2L_2C_2+1}=\frac{j\dfrac{1}{2\sqrt{LC}}(2L)}{\underbrace{-\dfrac{1}{4LC}(2L)(2C)+1}_{0}}\to\infty$$

$$u_{R_1}^{(\omega_{g1})}=R_1I\cos\left(\frac{1}{2\sqrt{CL}}t\right)$$

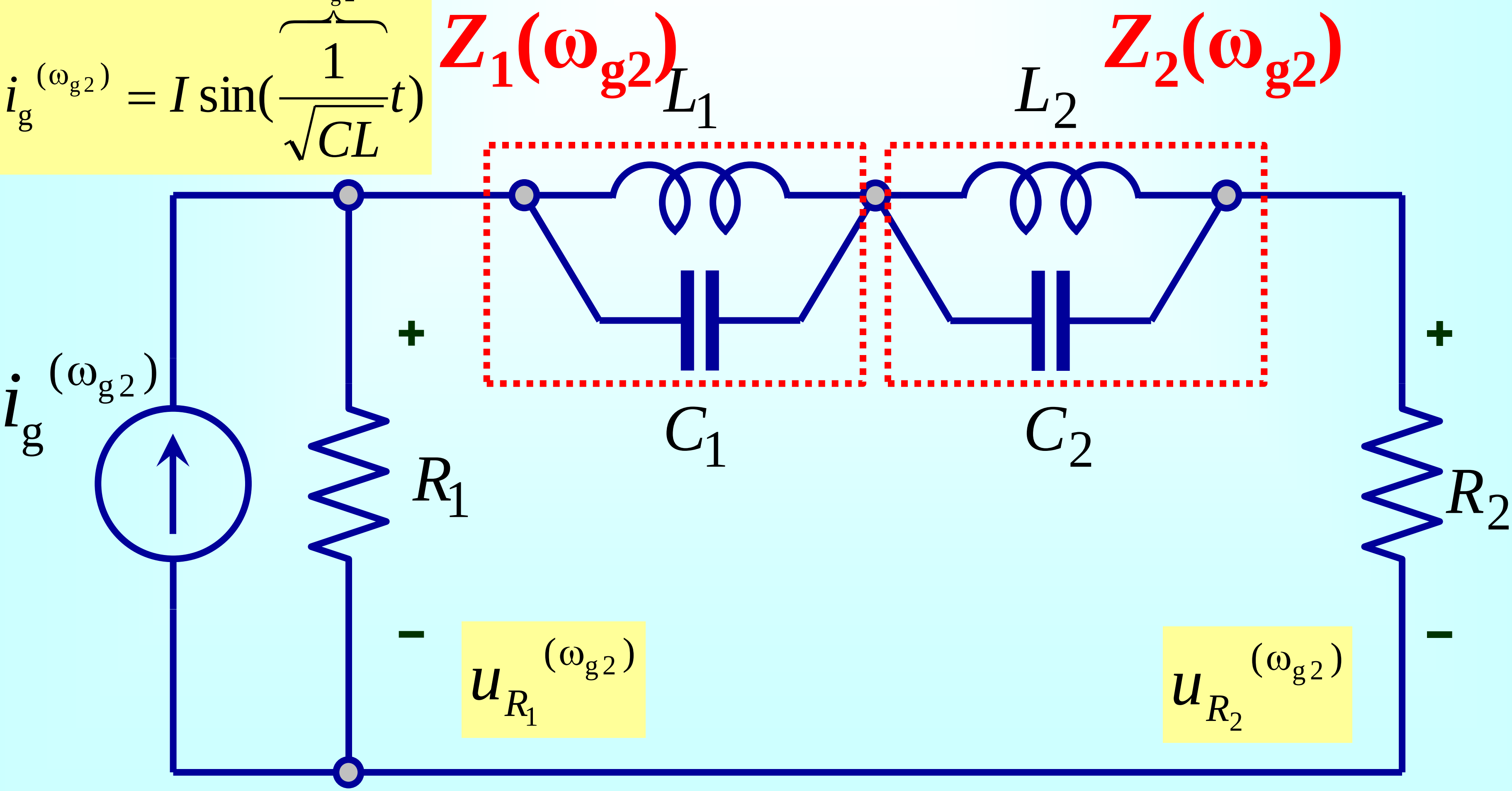
$$u_{R_2}^{(\omega_{g1})}=0$$



Устаљен простопериодичан одзив друге побуде

AC Analysis (2)

$$i_g^{(\omega_{g2})} = I\sin(\overbrace{\frac{1}{\sqrt{CL}}}^{\omega_{g2}} t)$$



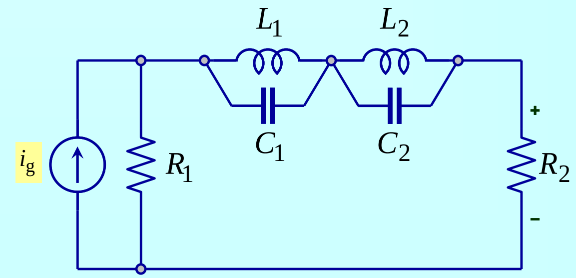
Напон УППО друге побуде

$$\underline{Z}_1^{(\omega_{g2})}=\frac{j\omega_{g2}L_1\dfrac{1}{j\omega_{g2}C_1}}{j\omega_{g2}L_1+\dfrac{1}{j\omega_{g2}C_1}}=\frac{j\omega_{g2}L_1}{-\omega_{g2}^2L_1C_1+1}=\frac{j\dfrac{1}{\sqrt{LC}}L}{\underbrace{-\dfrac{1}{LC}LC+1}_{0}}\to\infty$$

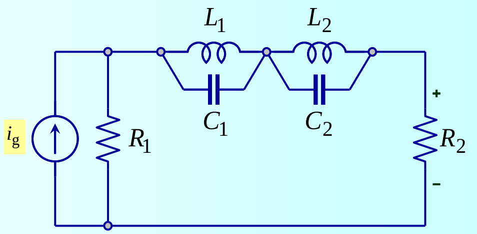
$$\underline{Z}_2^{(\omega_{g2})}=\frac{j\omega_{g2}L_2\dfrac{1}{j\omega_{g2}C_2}}{j\omega_{g2}L_2+\dfrac{1}{j\omega_{g2}C_2}}=\frac{j\omega_{g2}L_2}{-\omega_{g2}^2L_2C_2+1}=\frac{j\dfrac{1}{\sqrt{LC}}(2L)}{-\dfrac{1}{LC}(2L)(2C)+1}=-j\frac{2}{3}\sqrt{\frac{L}{C}}$$

$$u_{R_1}^{(\omega_{g2})}=R_1I\sin\left(\frac{1}{\sqrt{CL}}t\right)$$

$$u_{R_2}^{(\omega_{g2})}=0$$

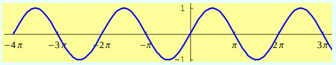
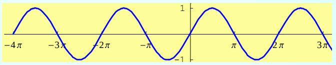


Устаљен напон



$$u_{R_1} = u_{R_1}^{(0)} + u_{R_1}^{(\omega_{g1})} + u_{R_1}^{(\omega_{g2})}$$

$$u_{R_2} = u_{R_2}^{(0)} + \overbrace{u_{R_2}^{(\omega_{g1})}}^{0} + \overbrace{u_{R_2}^{(\omega_{g2})}}^{0} = u_{R_2}^{(0)}$$

Обратити пажњу да **није могуће сабирати** фазоре (комплексне представнике) јер су они дефинисани за различите учестаности.

Фазори су дефинисани за **косинусну** представу протопериодичне функције (напона или струје).

Модул фазора (комплексног представника) је једнак **ефективној вредности** простопериодичне величине.

Развој периодичне функције у ред

Фуријеов тригонометријски ред

Фуријеови коефицијенти

$$u(t) = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(A_n \cos(n\omega_1 t) + B_n \sin(n\omega_1 t))$$

$$\omega_1 = \frac{2\pi}{T}$$

$$A_n = \frac{2}{T}\int_0^T u(t)\cos(n\omega_1 t)\,\mathrm{d}t$$

$$C_0 = \frac{1}{T}\int_0^T u(t)\,\mathrm{d}t$$

$$B_n = \frac{2}{T}\int_0^T u(t)\sin(n\omega_1 t)\,\mathrm{d}t$$

Експоненцијални облик

$$u(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \underline{C}_n \exp(\mathrm{j} n \omega_1 t)$$

$$\underline{C}_n = \frac{1}{T} \int_0^T u(t) \exp(-\mathrm{j} n \omega_1 t) \, \mathrm{d}t$$

$$\omega_1 = \frac{2\pi}{T}$$

Поступак одређивања Фуријеових коефицијената је Фуријеова анализа

$$\underline{C}_n = \frac{A_n - \mathrm{j} B_n}{2}, \quad n \neq 0$$

Хармоници

$$u^{(0)} = C_0 = U^{(0)}$$

Нулти хармоник, средња вредност, једносмерна компонента, DC компонента

$$u^{(1)} = A_1 \cos(\omega_1 t) + B_1 \sin(\omega_1 t)$$
$$= \sqrt{2} U^{(1)} \cos(\omega_1 t + \theta^{(1)})$$

Први хармоник, основни хармоник, AC компонента

$$u^{(n)} = A_n \cos(n\omega_1 t) + B_n \sin(n\omega_1 t)$$
$$= \sqrt{2} U^{(n)} \cos(n\omega_1 t + \theta^{(n)})$$

Виши хармоници

$$n = 2,3,4,\ldots$$

Парсевалов и Риманов став

$$u(t) = U^{(0)} + \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{2} U^{(n)} \cos(n\omega_1 t + \theta^{(n)})$$

$$\frac{1}{T}\int_0^T |u(t)|^2 \, \mathrm{d}t = C_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n^2 + B_n^2}{2} = (U^{(0)})^2 + \sum_{n=1}^{\infty} (U^{(n)})^2$$

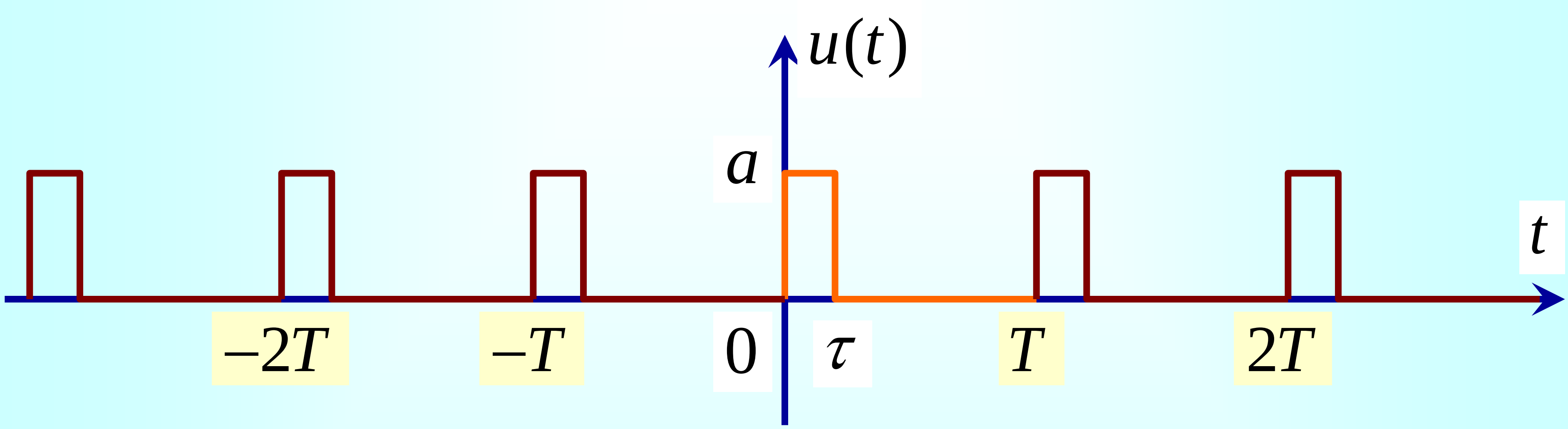
$$\lim_{n\to\infty} A_n = 0, \quad \lim_{n\to\infty} B_n = 0, \quad \lim_{n\to\infty} U^{(n)} = 0$$

Ефективна вредност

$$U_{\mathrm{eff}} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T |\,u(t)\,|^2\,\mathrm{d}t} = \sqrt{(U^{(0)})^2 + \sum_{n=1}^{\infty}(U^{(n)})^2}$$

Ефективна вредност (RMS, корен средње квадратне вредности, root-mean-square value) периодичне функције је квадратни корен средње вредности квадрата функције на интервалу дужине једне периоде. То је квадратни корен збира средњих вредности квадрата хармоника.

Пример развоја у Фуријеов ред



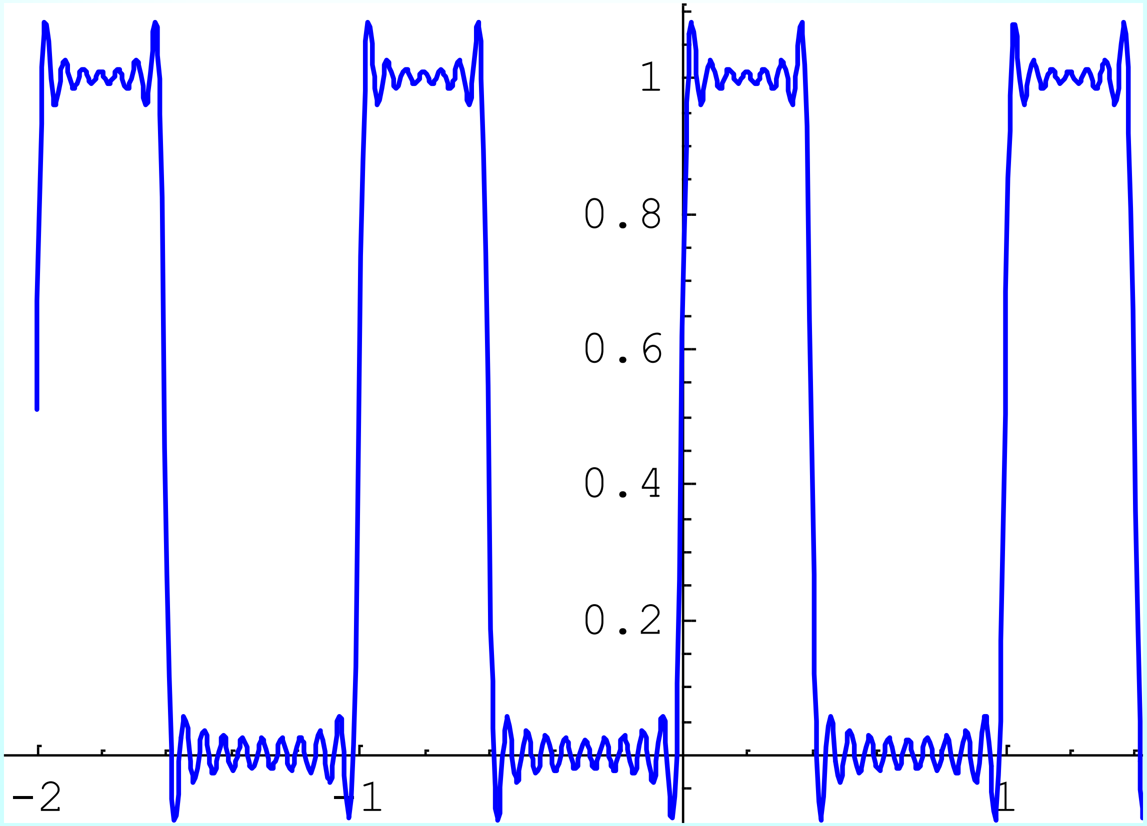
У тачкама прекида ред даје аритметичку средину левог и десног лимеса.

$$u(t) = \frac{a\tau}{T} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a\sin(n\omega_1\tau)}{n\pi}\cos(n\omega_1 t) + \frac{2a\sin^2(n\omega_1\tau/2)}{n\pi}\sin(n\omega_1 t)\right)$$

У рачунарској примени горња граница суме је коначан број.

Фуријеов збир са 16 чланова

Гибсов феномен



$a = 1$

$T = 1$

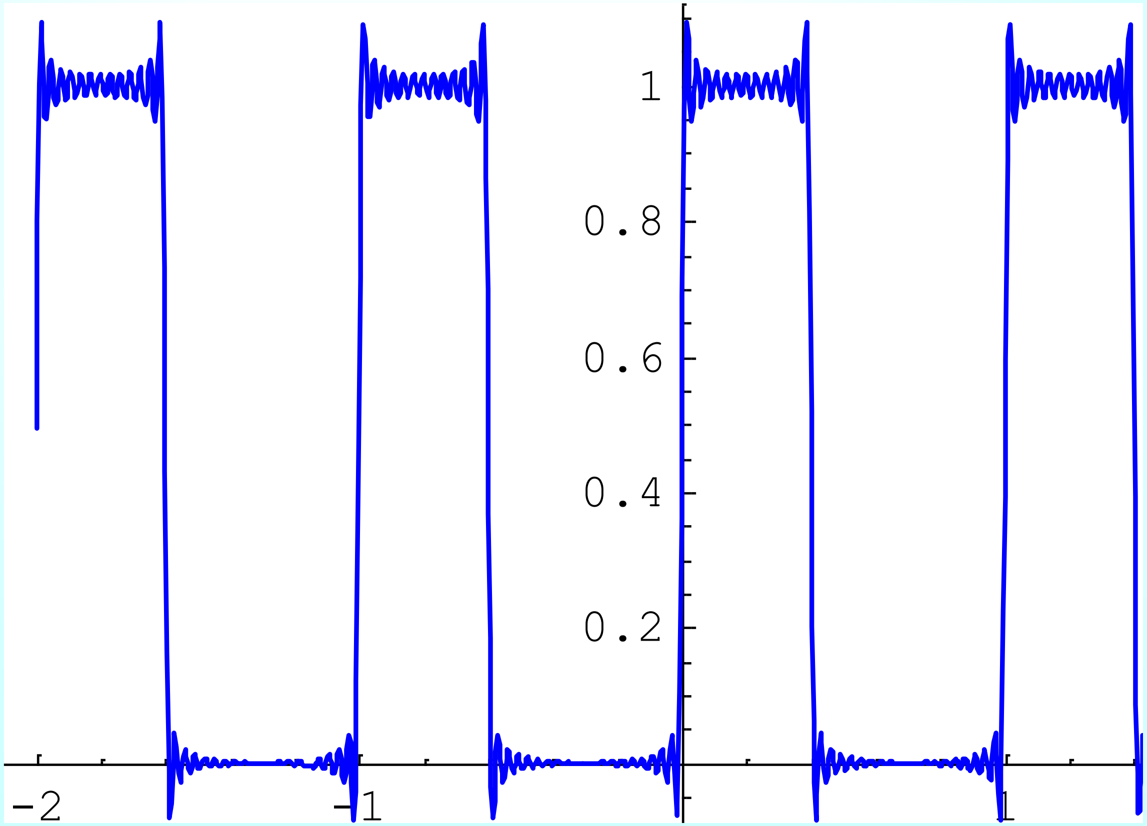
$\tau = \dfrac{2}{5}$

Фуријеов збир са 32 члана

$a = 1$

$T = 1$

$\tau = \dfrac{2}{5}$

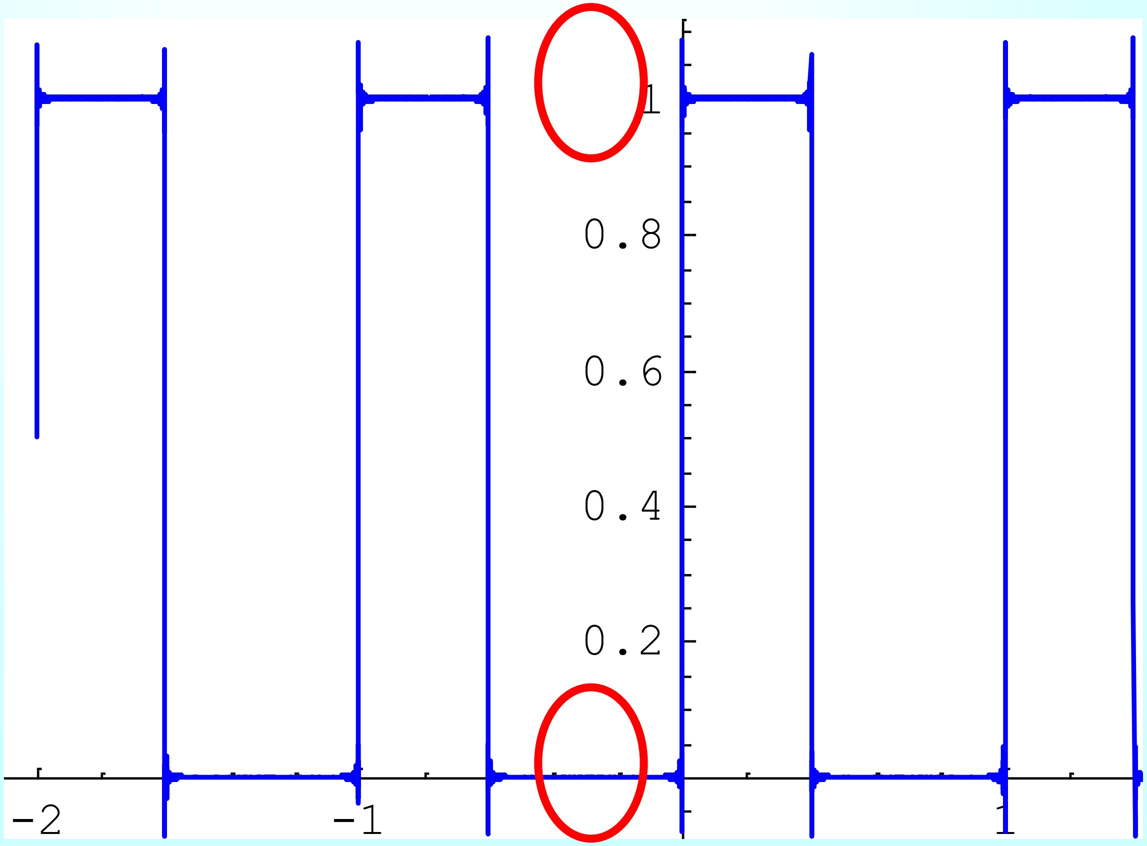


Фуријеов збир са 512 чланова

$a = 1$

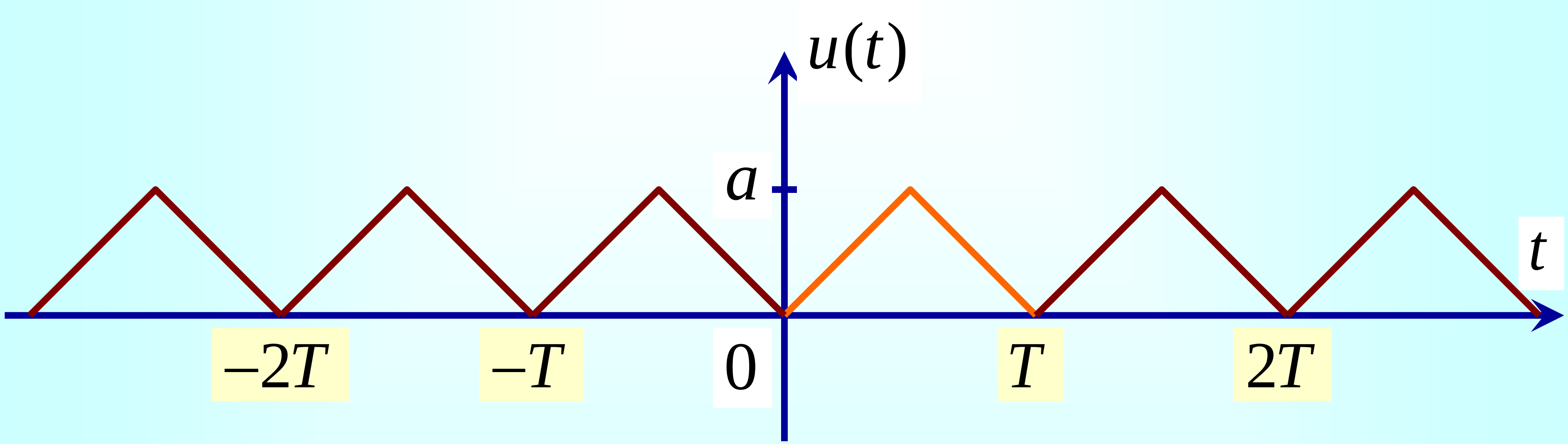
$T = 1$

$\tau = \dfrac{2}{5}$



Пример развоја у Фуријеов ред

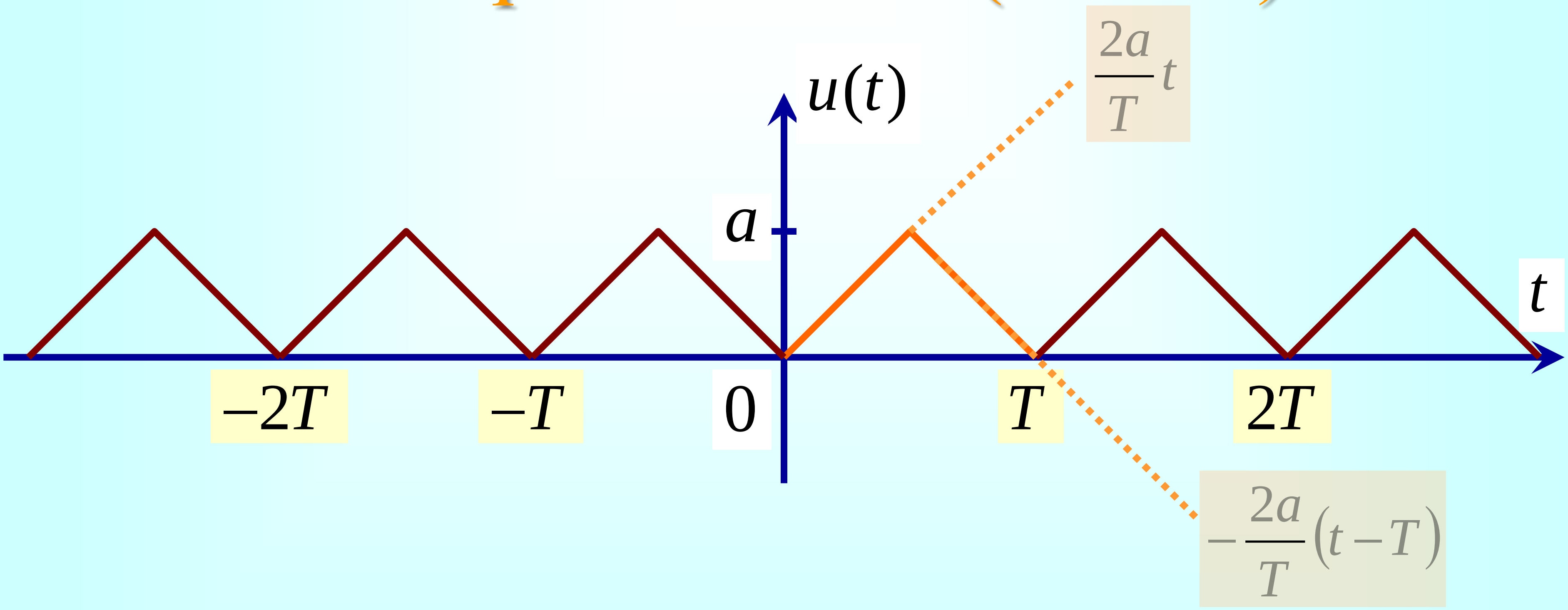
Тестерасти напон (сигнал)



Нацртати апроксимацију функције Фуријеовим збиром са 10, 100 и 500 сабирака. Да ли се уочава Гибсов феномен?

Пример развоја у Фуријеов ред

Тестерасти напон (сигнал)



$$u(t) = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos(n\omega_1 t) + B_n \sin(n\omega_1 t) \right)$$

$$u(t) = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos(n\omega_1 t) + B_n \sin(n\omega_1 t) \right)$$

$$\omega_1 = \frac{2\pi}{T}$$

$$C_0 = \frac{1}{T}\int_0^T u(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{T}\left(\int_0^{T/2} \left(\frac{2a}{T} t \right) \mathrm{d}t + \int_{T/2}^{T} \left(-\frac{2a}{T}(t-T) \right) \mathrm{d}t \right) = \frac{a}{2}$$

$$\boxed{C_0 = \frac{a}{2}}$$

$$A_n = \frac{2}{T}\int_0^T u(t)\cos(n\omega_1 t)\,\mathrm{d}t$$

$$\boxed{A_n = \frac{2a}{n^2\pi^2}\left(\overbrace{\cos(n\pi)}^{(-1)^n} - 1 \right)}$$

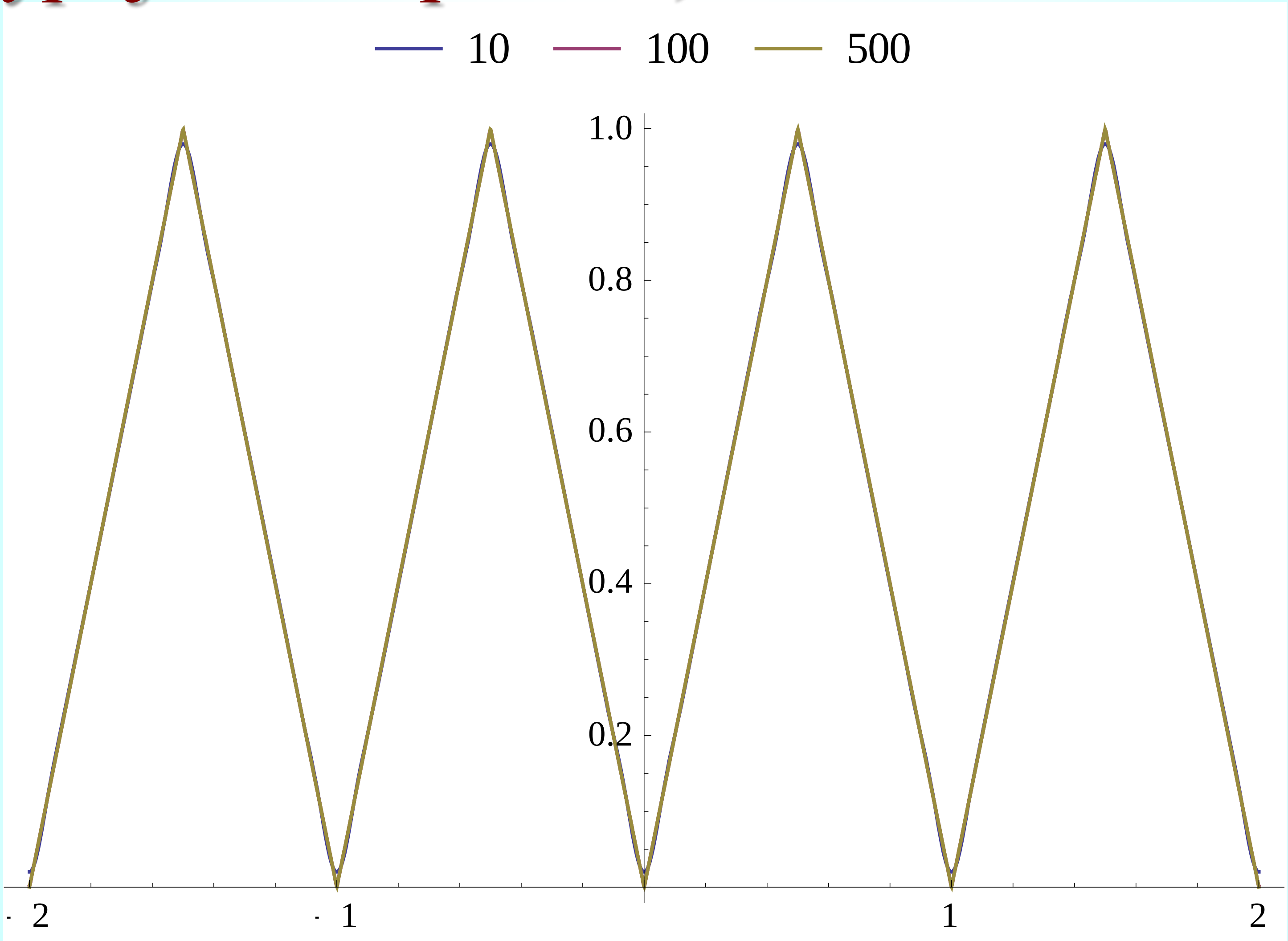
$$A_n = \frac{2}{T}\left(\int_0^{T/2} \left(\frac{2a}{T} t \right) \cos\!\left(n\frac{2\pi}{T} t\right) \mathrm{d}t + \int_{T/2}^{T} \left(-\frac{2a}{T}(t-T) \right) \cos\!\left(n\frac{2\pi}{T} t\right) \mathrm{d}t \right)$$

$$B_n = \frac{2}{T}\int_0^T u(t)\sin(n\omega_1 t)\,\mathrm{d}t$$

$$\boxed{B_n = 0}$$

$$B_n = \frac{2}{T}\left(\int_0^{T/2} \left(\frac{2a}{T} t \right) \sin\!\left(n\frac{2\pi}{T} t\right) \mathrm{d}t + \int_{T/2}^{T} \left(-\frac{2a}{T}(t-T) \right) \sin\!\left(n\frac{2\pi}{T} t\right) \mathrm{d}t \right) = 0$$

Фуријеов збир са 10, 100 и 500 чланова

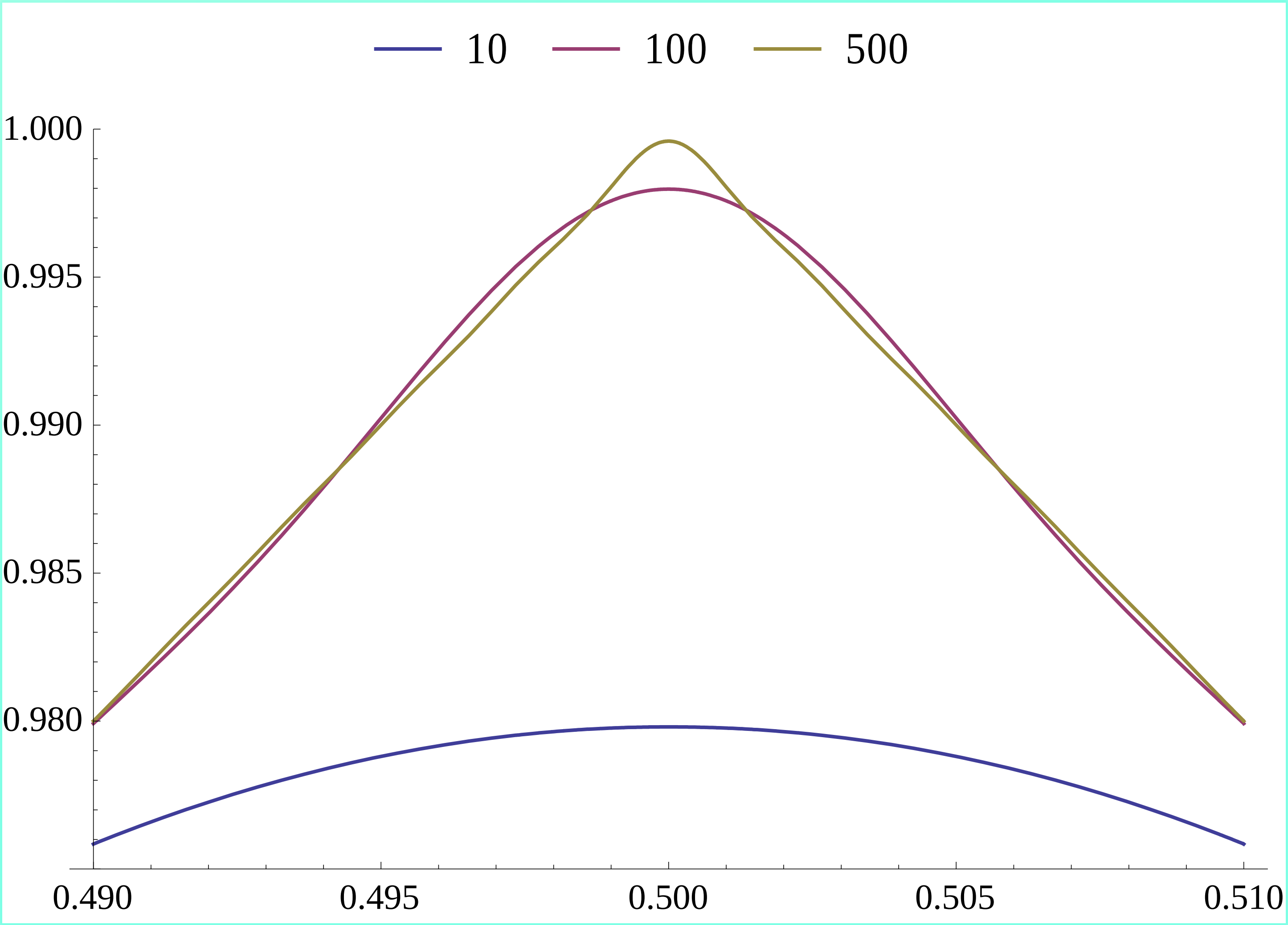


$a = 1$

$T = 1$

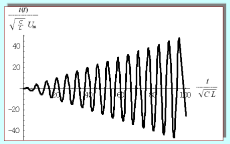
$$u(t) = \frac{a}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2a}{n^2\pi^2}\left((-1)^n - 1\right)\cos(n\omega_1 t)$$

Фуријеов збир са 10, 100 и 500 чланова



$a = 1$

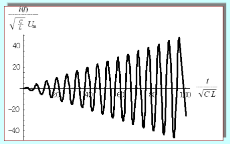
$T = 1$



Резонанција

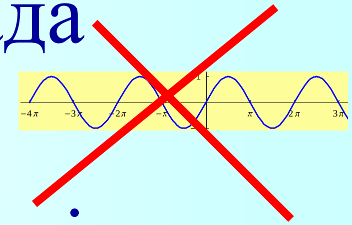
Временски непромењивог линеарног електричног кола

Tacoma Narrows Bridge, 7. Nov. 1940.

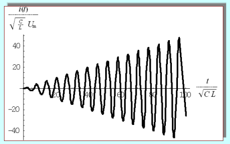


Шта је резонанција?

- ***Резонанција*** је појава у колу са периодичном побудом која настаје када постоји одређена веза између вредности елемената и параметара побуде, а када **не** постоји устаљен одзив

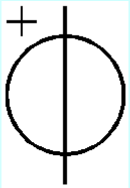


- ***Резонантан одзив*** је одзив који настаје када не постоје услови за успостављање устаљеног одзива

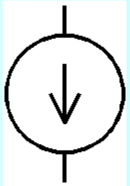


Резонантне учестаности

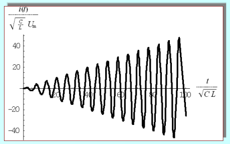
- ***Резонантне учестаности*** су полови комплексне функције ел. кола када је извор **напонски**



- ***Антирезонантне учестаности*** су полови комплексне функције ел. кола када је извор **струјни**



- Резонантне и антирезонантне учестаности су **комплексни** бројеви

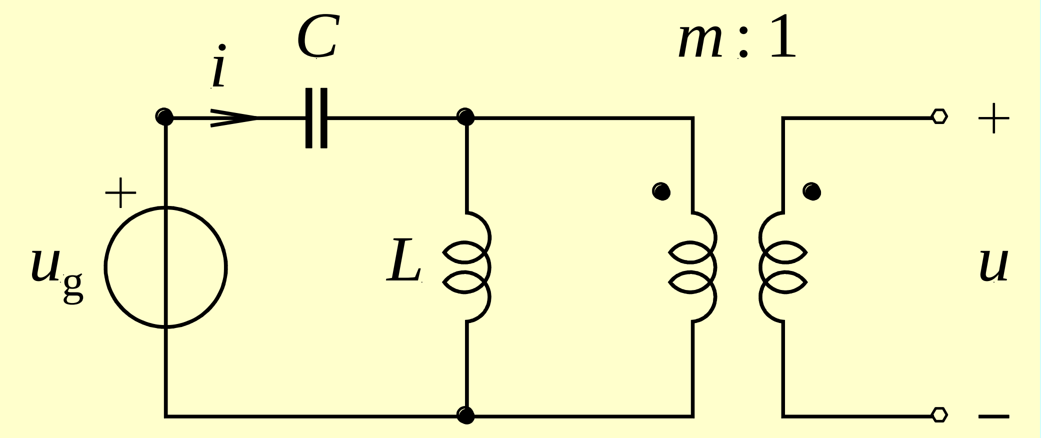


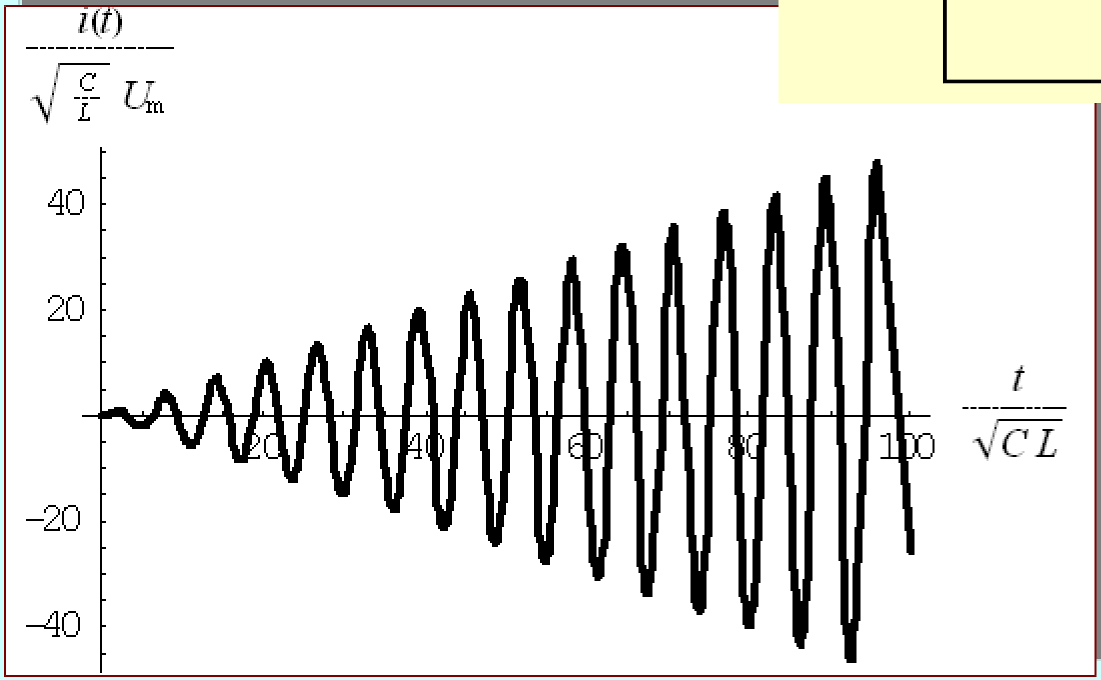
Резонанција кола без губитака

- Нека у ел. колу **без губитака** делује извор простопериодичне побуде
- Резонанција (антирезонанција) настаје када комплексна учестаност извора постане **једнака** сопственој учестаности
- Резонантни одзив је **растућа** функција времена

Пример резонанције

$$i(t) = \frac{1}{2} U_\mathrm{m} \frac{t}{L} \sin\left(\frac{1}{\sqrt{CL}} t\right) \vartheta(t)$$

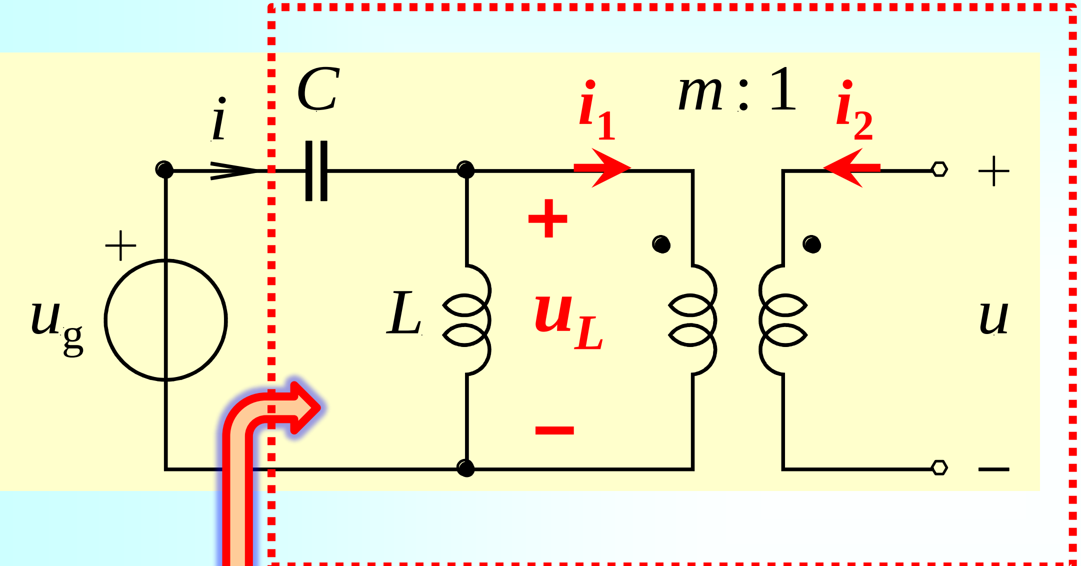




$$u_\mathrm{g}(t) = U_\mathrm{m} \sin\left(\frac{1}{\sqrt{CL}} t\right) \vartheta(t)$$

$$\underline{s} = \mathrm{j}\omega = \mathrm{j} \frac{1}{\sqrt{CL}}$$

Улазна импеданса мреже, резонантне и антирезонантне учестаности мреже



$$u_L = mu$$

$$i_1 = -\frac{1}{m} i_2$$

$$i_2 = 0 \Rightarrow i_1 = 0$$

$$\underline{Z}(\underline{s}) = \frac{1}{\underline{s}C} + \underline{s}L = \frac{1+\underline{s}^2 LC}{\underline{s}C}$$

Резонантне учестаности

$$\underline{Z}(\underline{s}) = 0 \Rightarrow \underline{s}_{\mathrm{R1,2}} = \pm \mathrm{j} \overbrace{\frac{1}{\sqrt{CL}}}^{\omega_{\mathrm{R}}}$$

Антирезонантне учестаности

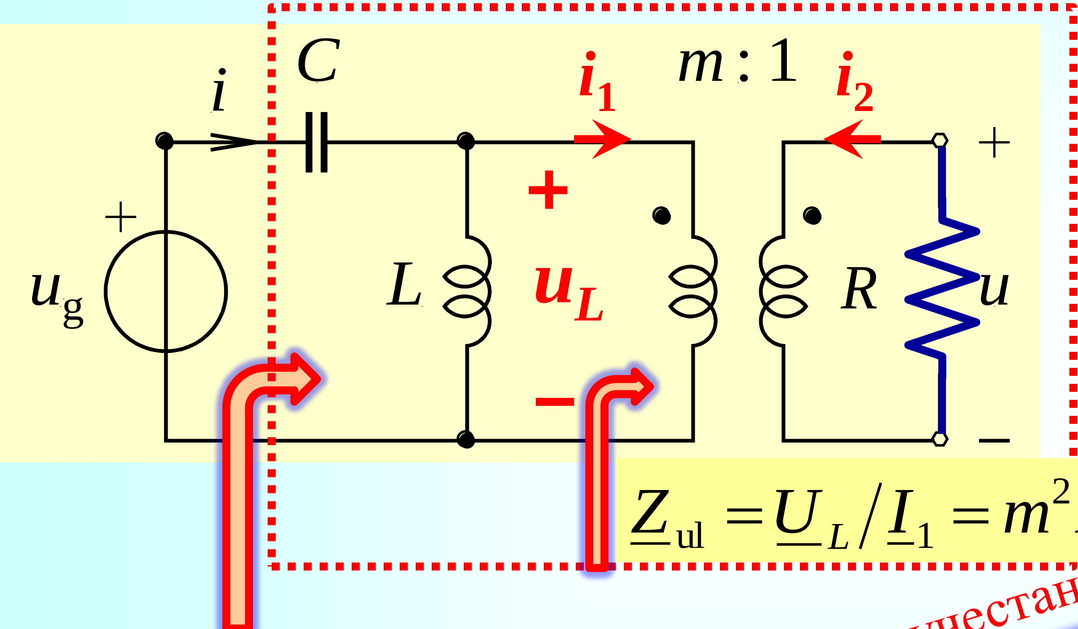
$$\underline{Y}(\underline{s}) = 1/\underline{Z}(\underline{s}) = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\underline{s}_{\mathrm{AR1}} = 0$$

$$\underline{s}_{\mathrm{AR2}} \to \infty$$

Улазна импеданса мреже, резонантне и антирезонантне учестаности мреже кад је секундар затворен отпорником



$$u_L = mu$$

$$i_1 = -\frac{1}{m} i_2$$

$$L = R^2 C$$

$$\underline{Z}_{\text{ul}} = \underline{U}_L / \underline{I}_1 = m^2 R$$

$$\underline{Z}(\underline{s}) = \frac{1}{\underline{s}C} + \frac{\underline{s}L\, m^2 R}{\underline{s}L + m^2 R}$$

$$\underline{Z}(\underline{s}) = \frac{\underline{s}^2 LC\, m^2 R + \underline{s}L + m^2 R}{\underline{s}C\left(\underline{s}L + m^2 R\right)}$$

Резонантне учестаности

$$\underline{Z}(\underline{s}) = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\underline{s}_{\text{R}1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4m^4}}{2m^2 CR}$$

Антирезонантне учестаности

$$\underline{Y}(\underline{s}) = 1/\underline{Z}(\underline{s}) = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\underline{s}_{\text{AR}1} = 0,\ \underline{s}_{\text{AR}2} = -\frac{m^2 R}{L}$$

Задатак 1

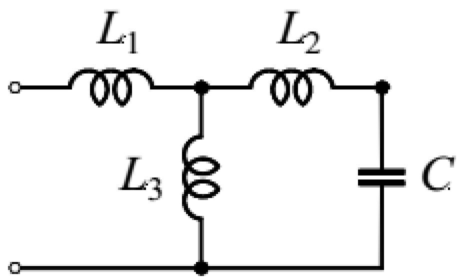
Задатак 1

Вредности елемената електричне мреже са једним приступом су познате и $L_1 = L_2 = L_3 = L$.

(а) Одредити резонантне учестаности мреже (комплексне учестаности резонанције).

(б) Одредити антирезонантне учестаности мреже (комплексне учестаности антирезонанције).

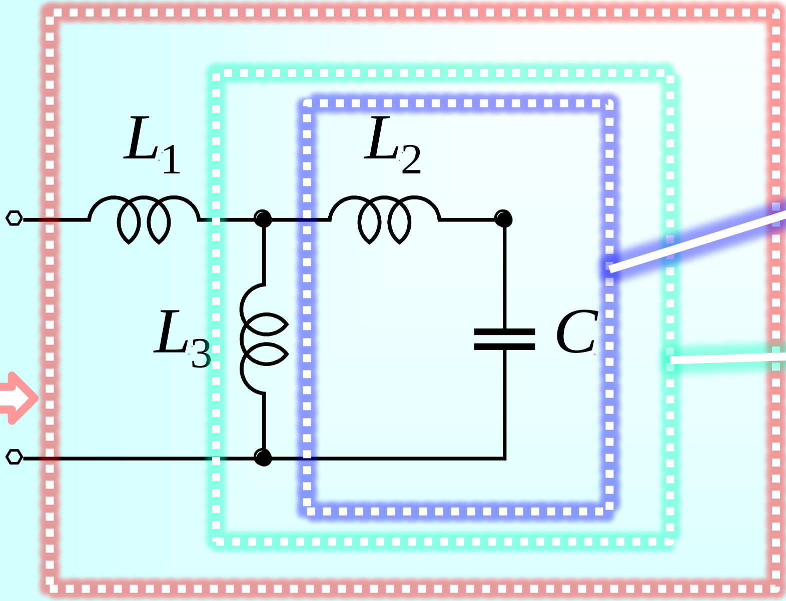
(в) Ако се мрежа прикључи на простопериодичан извор напона, колика треба да буде угаона учестаност извора да би наступила резонанција, односно да би настао резонантан одзив?



Слика уз задатак 1.

Улазна импеданса мреже

$L_1 = L_2 = L_3 = L$



$$\underline{Z}_1(\underline{s}) = \frac{1}{\underline{s}C} + \underline{s}L_2$$

$$\underline{Y}_2(\underline{s}) = \frac{1}{\underline{Z}_1(\underline{s})} + \frac{1}{\underline{s}L_3}$$

$$\underline{Z}(\underline{s}) = \underline{s}L_1 + \frac{1}{\underline{Y}_2}$$

$$\underline{Z}(\underline{s}) = \underline{s}L_1 + \frac{1}{\frac{1}{\underline{s}L_3} + \frac{1}{\underline{s}L_2 + \frac{1}{\underline{s}C}}} = \frac{\underline{s}L\left(3\underline{s}^2LC + 2\right)}{2\underline{s}^2LC + 1}$$

Резонантне и антирезонантне учестаности мреже

$$\underline{Z}(\underline{s}) = \frac{\underline{s}L\left(3\underline{s}^2LC+2\right)}{2\underline{s}^2LC+1}$$

Резонантне учестаности

$$\underline{Z}(\underline{s}) = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\underline{s}_{\mathrm{R}1,2} = \pm \mathrm{j}\sqrt{\frac{2}{3LC}}$$

$$\underline{s}_{\mathrm{R}3} = 0$$

Антирезонантне учестаности

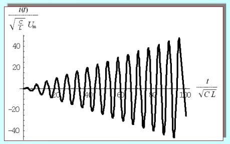
$$\underline{Y}(\underline{s}) = 1/\underline{Z}(\underline{s}) = 0$$

$$\Downarrow$$

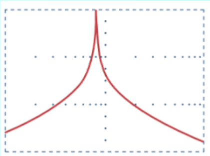
$$\underline{s}_{\mathrm{AR}1,2} = \pm \mathrm{j}\frac{1}{\sqrt{2LC}}$$

$$\underline{s}_{\mathrm{AR}3} \to \infty$$

Ако се мрежа прикључи на простопериодичан извор напона, угаона учестаност извора треба да буде $\boxed{\sqrt{\frac{2}{3LC}}}$ да би наступила резонанција.



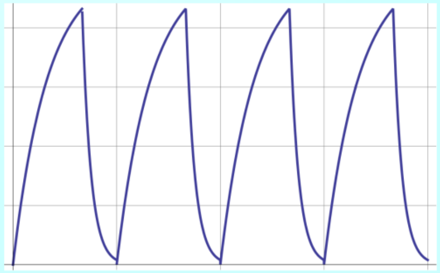
Амплитудска резонанција



- ***Учестаности амплитудске резонанције*** су учестаности за које је амплитудска карактеристика максимална
- ***Учестаности фазне резонанције*** су учестаности за које је фазна карактеристика једнака нули
- Резонанцију везујемо за напонску побуду, а антирезонанцију за струјну

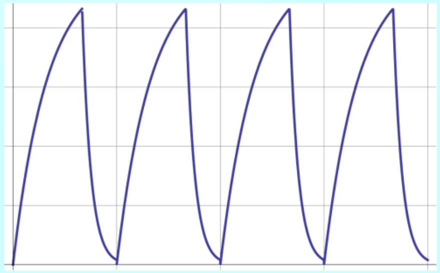
Устаљен сложенопериодичан одзив

временски непромењивог линеарног електричног кола



Одређивање УСПО

- Претпоставимо да делује један извор и да је побуда (сложено)**периодична**
- Побуду развијемо у **Фуријеов ред**
- Нека су испуњени услови за устаљен одзив
- Одзив одредимо **суперпозицијом**, као збир одзива на сваки од хармоника посматран понаособ



Комплексна снага, средња снага, реактивна снага

$$\underline{S}^{(n)} = \underline{U}^{(n)} \left(\underline{I}^{(n)}\right)^*$$

Комплексна снага *n*-тог хармоника

$$P^{(n)} = \mathrm{Re}\left(\underline{S}^{(n)}\right)$$

Средња снага *n*-тог хармоника

$$Q^{(n)} = \mathrm{Im}\left(\underline{S}^{(n)}\right)$$

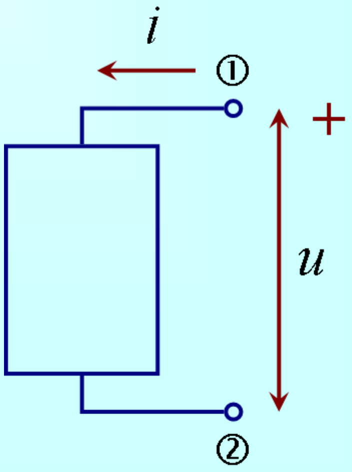
Реактивна снага *n*-тог хармоника

Средња (активна) снага

$$P = P^{(0)} + \sum_{n=1}^{\infty} P^{(n)}$$

Реактивна снага

$$Q = \sum_{n=1}^{\infty} Q^{(n)}$$



Привидна снага и снага дисторзије

$$S = U_{\text{eff}} I_{\text{eff}}$$

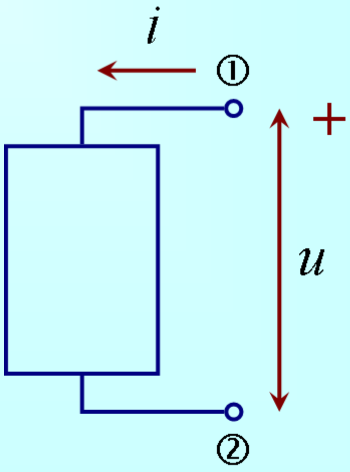
Привидна снага (Apparent power)

$$D = \sqrt{S^2 - P^2 - Q^2}$$

Снага изобличења (дисторзије) (Distortion power)

$$k_P = PF = \frac{P}{S}$$

Фактор снаге (Power factor)



Фактори УСПО

$$K_{\mathrm{d}} = \frac{U^{(1)}}{U_{\mathrm{eff}}}$$

Фактор изобличења (дисторзије) (Distortion factor)

За простопериодичан одзив, фактор изобличења је једнак 1

$$K_{\mathrm{r}} = \frac{U_{\mathrm{eff,AC}}}{U_{\mathrm{DC}}}$$

Фактор таласности (Ripple factor)

Количник ефективне вредности простопериодичних сабирака и нултог хармоника (DC компоненте).

$$K_{\mathrm{h}} = \frac{U_{\mathrm{eff,AC>1}}}{U^{(1)}}$$

Фактор виших хармоника (High-harmonics' factor)

Количник ефективне вредности виших хармоника и првог хармоника (фундаментала)..

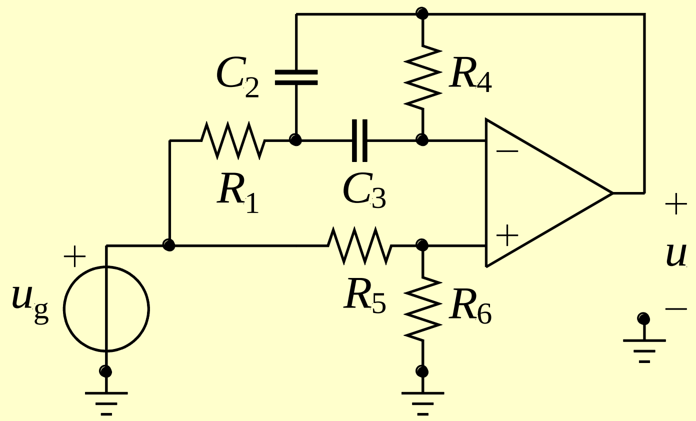
Задатак 2

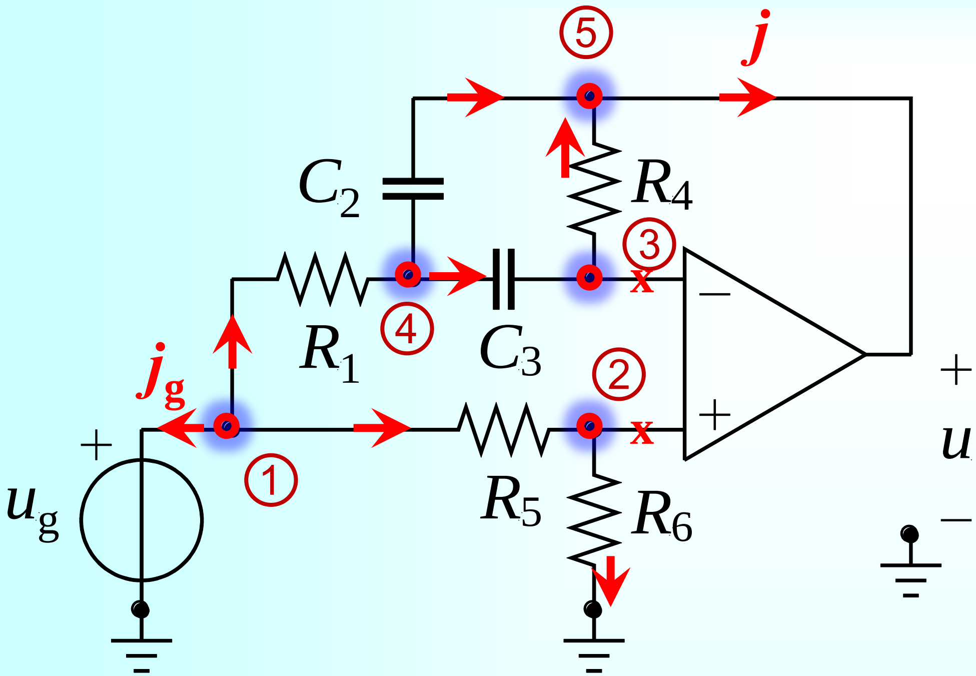
Капацитивности кондензатора електричног кола су C, а отпорности отпорника су $R_5 = 2R,\ R_1 = R_4 = R_6 = R$.

(5) Одредити трансфер функцију (уопштену комплексну функцију мреже, трансмитансу напона) $\underline{H}(\underline{s}) = \dfrac{\underline{U}(\underline{s})}{\underline{U}_{\mathrm{g}}(\underline{s})}$.

(5) Одредити нуле и полове трансфер функције.

(5) Колика је ефективна вредност напона u у случају да је одзив устаљен а побуда $u_{\mathrm{g}}(t) = U + U\sin(t/(3CR)) + U\cos(t/(CR))$?





x(1) $\boxed{\underline{J}_{\mathrm{g}}} + \left(\underline{V}_1 - \underline{V}_2\right)/R_5 + \left(\underline{V}_1 - \underline{V}_4\right)/R_1 = 0$

(2) $-\left(\underline{V}_1 - \underline{V}_2\right)/R_5 + \underline{V}_2/R_6 = 0$

(3) $\left(\underline{V}_3 - \underline{V}_5\right)/R_4 - \underline{s}C_3\left(\underline{V}_4 - \underline{V}_3\right) = 0$

(4) $-\left(\underline{V}_1 - \underline{V}_4\right)/R_1 + \underline{s}C_3\left(\underline{V}_4 - \underline{V}_3\right) + \underline{s}C_2\left(\underline{V}_4 - \underline{V}_5\right) = 0$

x(5) $\boxed{\underline{J}} - \underline{s}C_2\left(\underline{V}_4 - \underline{V}_5\right) - \left(\underline{V}_3 - \underline{V}_5\right)/R_4 = 0$

$\underline{J}_{\mathrm{g}},\ \underline{J} \Rightarrow \cancel{1), 5)}$

$\underline{V}_2 = \underline{V}_3$ $\quad$ $\underline{V}_1 = \underline{U}_{\mathrm{g}}$

$$(2)\ -\left(\underline{V}_1-\underline{V}_2\right)/R_5+\underline{V}_2/R_6=0$$

$$(3)\ \left(\underline{V}_3-\underline{V}_5\right)/R_4-\underline{s}\,C_3\left(\underline{V}_4-\underline{V}_3\right)=0$$

$$(4)\ -\left(\underline{V}_1-\underline{V}_4\right)/R_1+\underline{s}\,C_3\left(\underline{V}_4-\underline{V}_3\right)+\underline{s}\,C_2\left(\underline{V}_4-\underline{V}_5\right)=0$$

$$(2)\ -\underline{V}_1+3\underline{V}_2=0 \qquad \underline{V}_2=\frac{1}{3}\underline{V}_1$$

$$(3)\ \overbrace{\underline{V}_3}^{\underline{V}_2}\left(1+\underline{s}\,CR\right)-\underline{V}_5-\underline{s}\,CR\underline{V}_4=0$$

$$(4)\ -\underline{V}_1+\underline{V}_4\left(1+2\underline{s}\,RC\right)-\underline{s}\,RC\overbrace{\underline{V}_3}^{\underline{V}_2}-\underline{s}\,RC\underline{V}_5=0$$

$$(3)\ \frac{1}{3}\underline{V}_1\left(1+\underline{s}\,CR\right)-\underline{V}_5-\underline{s}\,CR\underline{V}_4=0 \qquad \underline{V}_4=\frac{1}{\underline{s}\,CR}\left(\frac{1}{3}\underline{V}_1\left(1+\underline{s}\,CR\right)-\underline{V}_5\right)$$

$$(4)\ -\underline{V}_1+\underline{V}_4\left(1+2\underline{s}\,RC\right)-\underline{s}\,RC\overbrace{\underline{V}_3}^{\underline{V}_2}-\underline{s}\,RC\underline{V}_5=0$$

$$-\underline{V}_1+\frac{1}{\underline{s}\,CR}\left(\frac{1}{3}\underline{V}_1\left(1+\underline{s}\,CR\right)-\underline{V}_5\right)\left(1+2\underline{s}\,RC\right)-\underline{s}\,RC\frac{1}{3}\underline{V}_1-\underline{s}\,RC\underline{V}_5=0$$

Трансфер функција

$$-\underline{V}_1+\frac{1}{\underline{s}CR}\left(\frac{1}{3}\underline{V}_1(1+\underline{s}CR)-\underline{V}_5\right)(1+2\underline{s}RC)-\underline{s}RC\frac{1}{3}\underline{V}_1-\underline{s}RC\underline{V}_5=0$$

$$\underline{V}_1\left(-1+\frac{(1+\underline{s}CR)(1+2\underline{s}RC)}{3\underline{s}CR}-\frac{\underline{s}RC}{3}\right)-\underline{V}_5\left(\frac{1+2\underline{s}RC}{\underline{s}CR}+\underline{s}RC\right)=0$$

$$\underline{V}_1\left(\frac{-3\underline{s}CR+1+3\underline{s}CR+2\underline{s}^2(RC)^2-\underline{s}^2(RC)^2}{3\underline{s}CR}\right)-\underline{V}_5\left(\frac{1+2\underline{s}RC+\underline{s}^2(RC)^2}{\underline{s}CR}\right)=0$$

$$\boxed{\underline{H}(\underline{s})=\frac{\underline{U}(\underline{s})}{\underline{U}_{\mathrm{g}}(\underline{s})}=\frac{\underline{V}_5(\underline{s})}{\underline{V}_1(\underline{s})}=\frac{1+\underline{s}^2(RC)^2}{3(1+\underline{s}RC)^2}}$$

Нуле и полови трансфер функције

$$\underline{H}(\underline{s}) = \frac{\underline{U}(\underline{s})}{\underline{U}_{\mathrm{g}}(\underline{s})} = \frac{1+\underline{s}^2(RC)^2}{3(1+\underline{s}RC)^2}$$

Нуле $$1+\underline{s}^2(RC)^2 = 0 \Rightarrow \underline{s}_{\mathrm{N}1,2} = \pm \mathrm{j}\frac{1}{RC}$$

Полови $$(1+\underline{s}RC)^2 = 0 \Rightarrow \underline{s}_{\mathrm{P}1,2} = -\frac{1}{RC}$$

Побуда развијена у Фуријеов ред

$$u_{\mathrm{g}}(t) = U_{\mathrm{g}}^{(0)} + \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{2} U_{\mathrm{g}}^{(n)} \cos(n\omega_1 t + \theta_{\mathrm{g}}^{(n)})$$

$$u_{\mathrm{g}}(t) = \overbrace{U}^{U_{\mathrm{g}}^{(0)}} + \sqrt{2}\overbrace{\left(\frac{U}{\sqrt{2}}\right)}^{U_{\mathrm{g}}^{(1)}}\cos(\omega_1 t + \overbrace{(-\pi/2)}^{\theta_{\mathrm{g}}^{(1)}}) + \sqrt{2}\overbrace{\left(\frac{U}{\sqrt{2}}\right)}^{U_{\mathrm{g}}^{(3)}}\cos(3\omega_1 t + \overbrace{0}^{\theta_{\mathrm{g}}^{(3)}})$$

$$\omega_1 = \frac{1}{3CR}$$

У теорији ред има бесконачно сабирака, док у практичном раду узимамо коначан број чланова који задовољава жељену тачност.

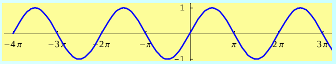
Одзив на нулти хармоник

DC Analysis

$$\underline{H}(\underline{s}=0)=\frac{\underline{U}(0)}{\underline{U}_{\mathrm{g}}(0)}=\frac{1}{3}\Rightarrow \underline{U}(0)=\underline{U}^{(0)}=\frac{1}{3}\underline{U}_{\mathrm{g}}(0)=\frac{1}{3}U$$

$$u^{(0)}(t)=\overbrace{\frac{1}{3}U}^{U^{(0)}}$$

Калемове замењујемо кратком везом, кондензаторе замењујемо отвореном везом, и решавамо заменску шему за устаљен сталан (константан) одзив.



Одзив на *n*-ти хармоник

AC Analysis (n)

$$u_{\mathrm{g}}^{(n)}(t)=\sqrt{2}U_{\mathrm{g}}^{(n)}\cos(n\omega_1 t+\theta_{\mathrm{g}}^{(n)})$$

n-ти хармоник побуде $n\omega_1=n\dfrac{1}{3CR}$

$$\underline{U}_{\mathrm{g}}^{(n)}=U_{\mathrm{g}}^{(n)}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta_{\mathrm{g}}^{(n)}}$$

Фазор (комплексан представник) *n*-тог хармоника побуде

$$\underline{H}(\underline{s})=\frac{\underline{U}(\underline{s})}{\underline{U}_{\mathrm{g}}(\underline{s})}=\frac{1+\underline{s}^2(RC)^2}{3(1+\underline{s}RC)^2}$$

$$\underline{H}(\underline{s}=\mathrm{j}n\omega_1)=\frac{\underline{U}(\mathrm{j}n\omega_1)}{\underline{U}_{\mathrm{g}}(\mathrm{j}n\omega_1)}=\frac{1-(n\omega_1)^2(RC)^2}{3(1+\mathrm{j}n\omega_1RC)^2}=\frac{1-n^2/9}{3(1+\mathrm{j}n/3)^2}$$

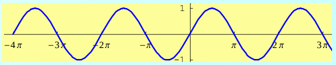
$$\boxed{\underline{U}(\mathrm{j}n\omega_1)=\underline{U}^{(n)}=\frac{1-n^2/9}{3(1+\mathrm{j}n/3)^2}\overbrace{\underline{U}_{\mathrm{g}}(\mathrm{j}n\omega_1)}^{\underline{U}_{\mathrm{g}}^{(n)}}}$$

Фазор (комплексан представник) *n*-тог хармоника одзива

$$u^{(n)}(t)=\sqrt{2}\,\mathrm{Re}(\underline{U}^{(n)}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}n\omega_1 t})$$

n-ти хармоник одзива

$$\boxed{\omega=n\omega_1}$$



Одзив на 1. хармоник

AC Analysis 1

$$u_{\mathrm{g}}^{(1)}(t)=\sqrt{2}\overbrace{\left(\frac{U}{\sqrt{2}}\right)}^{U_{\mathrm{g}}^{(1)}}\cos(\omega_1 t+\overbrace{(-\pi/2)}^{\theta_{\mathrm{g}}^{(1)}})$$

1. хармоник побуде

$$\omega_1=\frac{1}{3CR}$$

$$\underline{U}_{\mathrm{g}}^{(1)}=U_{\mathrm{g}}^{(1)}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta_{\mathrm{g}}^{(1)}}=\frac{U}{\sqrt{2}}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\pi/2}$$

Фазор (комплексан представник) 1. хармоника побуде

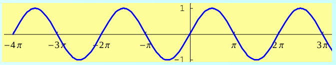
$$\underline{U}(\mathrm{j}\omega_1)=\underline{U}^{(1)}=\frac{1-1/9}{3(1+\mathrm{j}/3)^2}\overbrace{\underline{U}_{\mathrm{g}}(\mathrm{j}\omega_1)}^{\underline{U}_{\mathrm{g}}^{(1)}}=\frac{4}{3(4+3\mathrm{j})}\frac{U}{\sqrt{2}}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\pi/2}$$

$$\boxed{\underline{U}^{(1)}=\frac{4}{3(4+3\mathrm{j})}\frac{U}{\sqrt{2}}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\pi/2}}$$

Фазор (комплексан представник) 1. хармоника одзива

$$u^{(1)}(t)=\sqrt{2}\,\mathrm{Re}(\underline{U}^{(1)}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_1 t})=\sqrt{2}\overbrace{\left(\frac{4}{15}\frac{U}{\sqrt{2}}\right)}^{U^{(1)}}\cos(\omega_1 t-\frac{\pi}{2}-\arctan(\frac{3}{4}))$$

1. хармоник одзива



Одзив на 3. хармоник

AC Analysis 3

$$u_{\mathrm{g}}^{(3)}(t) = \sqrt{2}\overbrace{\left(\frac{U}{\sqrt{2}}\right)}^{U_{\mathrm{g}}^{(3)}}\cos(3\omega_1 t + \overbrace{0}^{\theta_{\mathrm{g}}^{(3)}})$$

3. хармоник побуде

$$3\omega_1 = 3\frac{1}{3CR}$$

$$\underline{U}_{\mathrm{g}}^{(3)} = U_{\mathrm{g}}^{(3)}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta_{\mathrm{g}}^{(3)}} = \frac{U}{\sqrt{2}}$$

Фазор (комплексан представник)
3. хармоника побуде

$$\boxed{\underline{U}(\mathrm{j}3\omega_1) = \underline{U}^{(3)} = 0}$$

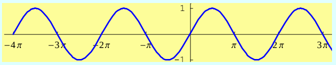
Фазор (комплексан представник)
3. хармоника одзива

$$u^{(3)}(t) = \sqrt{2}\,\mathrm{Re}(\underline{U}^{(3)}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}3\omega_1 t}) = 0$$

3. хармоник одзива

Одзив - збир свих хармоника одзива

$$u(t)=u^{(0)}(t)+u^{(1)}(t)+\overbrace{u^{(3)}(t)}^{0}$$



Обратити пажњу да **није могуће сабирати** фазоре (комплексне представнике) јер су они дефинисани за различите учестаности.

Ефективна вредност

$$U_{\mathrm{eff}} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T |u(t)|^2 \,\mathrm{d}t} = \sqrt{(U^{(0)})^2 + \sum_{n=1}^{\infty}(U^{(n)})^2}$$

$$U_{\mathrm{eff}} = \sqrt{(U^{(0)})^2 + (U^{(1)})^2 + (U^{(3)})^2}$$

$$\boxed{U_{\mathrm{eff}} = \sqrt{\left(\frac{1}{3}U\right)^2 + \left(\frac{4}{15}\frac{U}{\sqrt{2}}\right)^2} = \frac{\sqrt{33}}{15}U}$$

SymPy Live - Mozilla Firefox

File Edit View History Bookmarks Tools Help

http://live.sympy.org/

Most Visited Getting Started Latest Headlines

SymPy Live

SymPy Online Shell running on the Google App Engine. log in

```
>>> var('C2, C3, R1, R4, R5, R6', positive=True)
... var('s, Ug, V1, V2, V3, V4')
... jednacine = [
... Eq( (V1 - Ug)/R1 + (V1 - V2)*C2*s + (V1 - V3)*C3*s, 0),
... Eq( V3 - V4, 0),
... Eq( (V3 - V1)*C3*s + (V3 - V2)/R4 + 0, 0),
... Eq( (V4 - Ug)/R5 + (V4 - 0)/R6 + 0, 0)
... ]
... promenljive = [V1, V2, V3, V4]
... odziv = solve(jednacine, promenljive)
... Hs = (V2/Ug).subs(odziv);
... Hs.collect(s)
```

$$\frac{C_2C_3R_1R_4R_6s^2 + R_6 + s\left(C_2R_1R_6 + C_3R_1R_6 - C_3R_4R_5\right)}{R_5 + R_6 + s^2\left(C_2C_3R_1R_4R_5 + C_2C_3R_1R_4R_6\right) + s\left(C_2R_1R_5 + C_2R_1R_6 + C_3R_1R_5 + C_3R_1R_6\right)}$$

```
>>>
```

Evaluate | Clear | LaTeX | Shift-Enter submits | Ctrl-Up/Down for history

About

This is just a regular Python shell, with the following command executed by default:

SymPy Live - Mozilla Firefox

http://live.sympy.org/

SymPy Online Shell running on the Google App Engine. Log in

```
... promenljive = [V1, V2, V3, V4]
... odziv = solve(jednacine, promenljive)
... Hs = (V2/Ug).subs(odziv);
... Hs.collect(s)
```

$$\frac{C_2 C_3 R_1 R_4 R_6 s^2 + R_6 + s(C_2 R_1 R_6 + C_3 R_1 R_6 - C_3 R_4 R_5)}{R_5 + R_6 + s^2(C_2 C_3 R_1 R_4 R_5 + C_2 C_3 R_1 R_4 R_6) + s(C_2 R_1 R_5 + C_2 R_1 R_6 + C_3 R_1 R_5 + C_3 R_1 R_6)}$$

```
>>> var('C, R, w', positive=True)
... vrednosti = {C2:C, C3:C, R1:R, R4:R, R5:2*R, R6:R}
... Hsv = (Hs.subs(vrednosti)).cancel()
... Hsv
```

$$\frac{C^2 R^2 s^2 + 1}{3C^2 R^2 s^2 + 6CRs + 3}$$

```
>>>
```

Evaluate | Clear | LaTeX | Shift-Enter submits | Ctrl-Up/Down for history

About

This is just a regular Python shell, with the following command executed by default:

SymPy Live - Mozilla Firefox

File Edit View History Bookmarks Tools Help

http://live.sympy.org/

Most Visited Getting Started Latest Headlines

SymPy Live

SymPy online shell running on the Google App Engine. log in

$$\frac{C^2R^2s^2+1}{3C^2R^2s^2+6CRs+3}$$

```
>>> nule = roots(numer(Hsv), s)
... nule
```

$$\left\{-\frac{-i}{CR}:1,\ \frac{i}{CR}:1\right\}$$

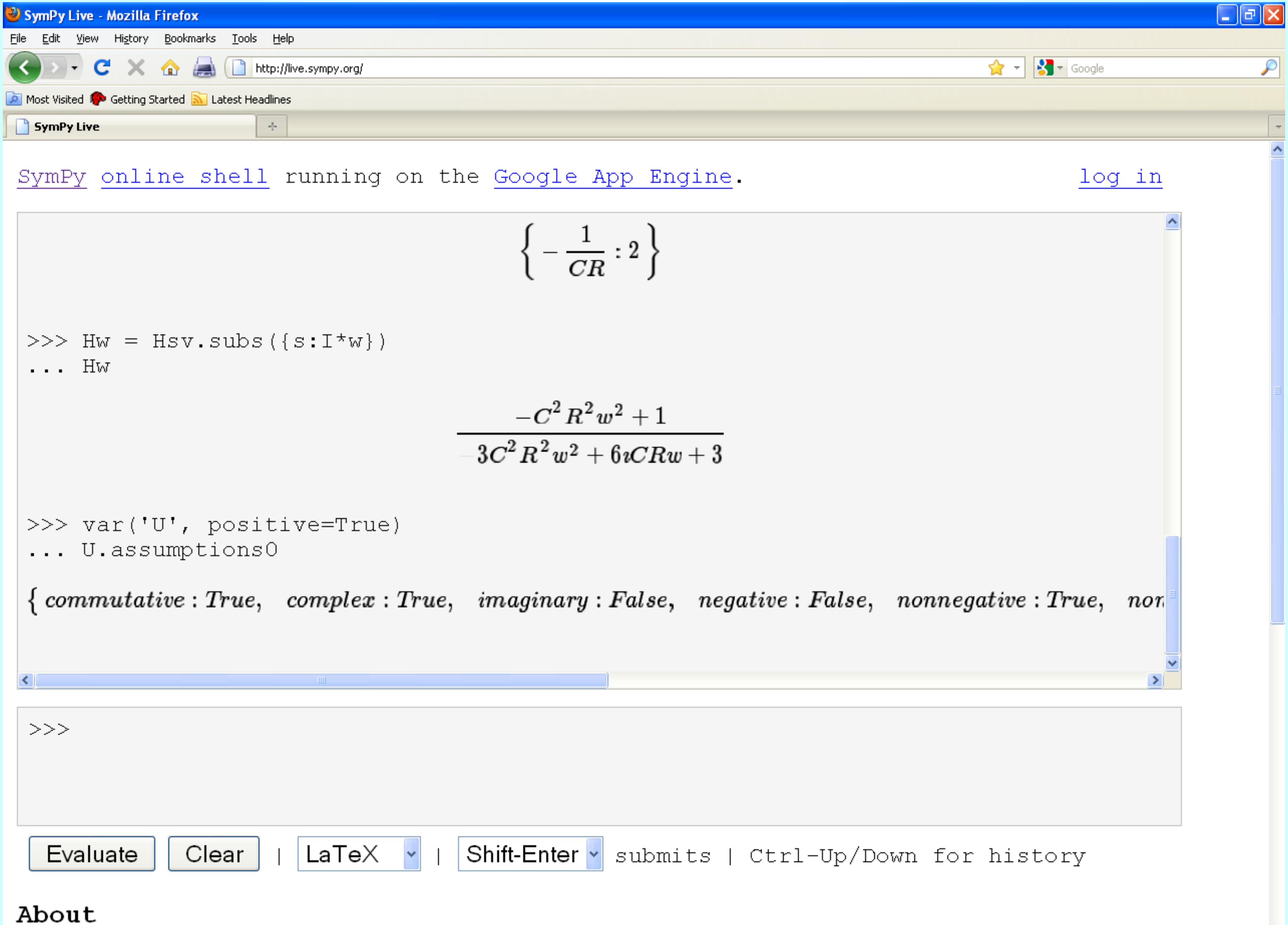
```
>>> polovi = roots(denom(Hsv), s)
... polovi
```

$$\left\{-\frac{1}{CR}:2\right\}$$

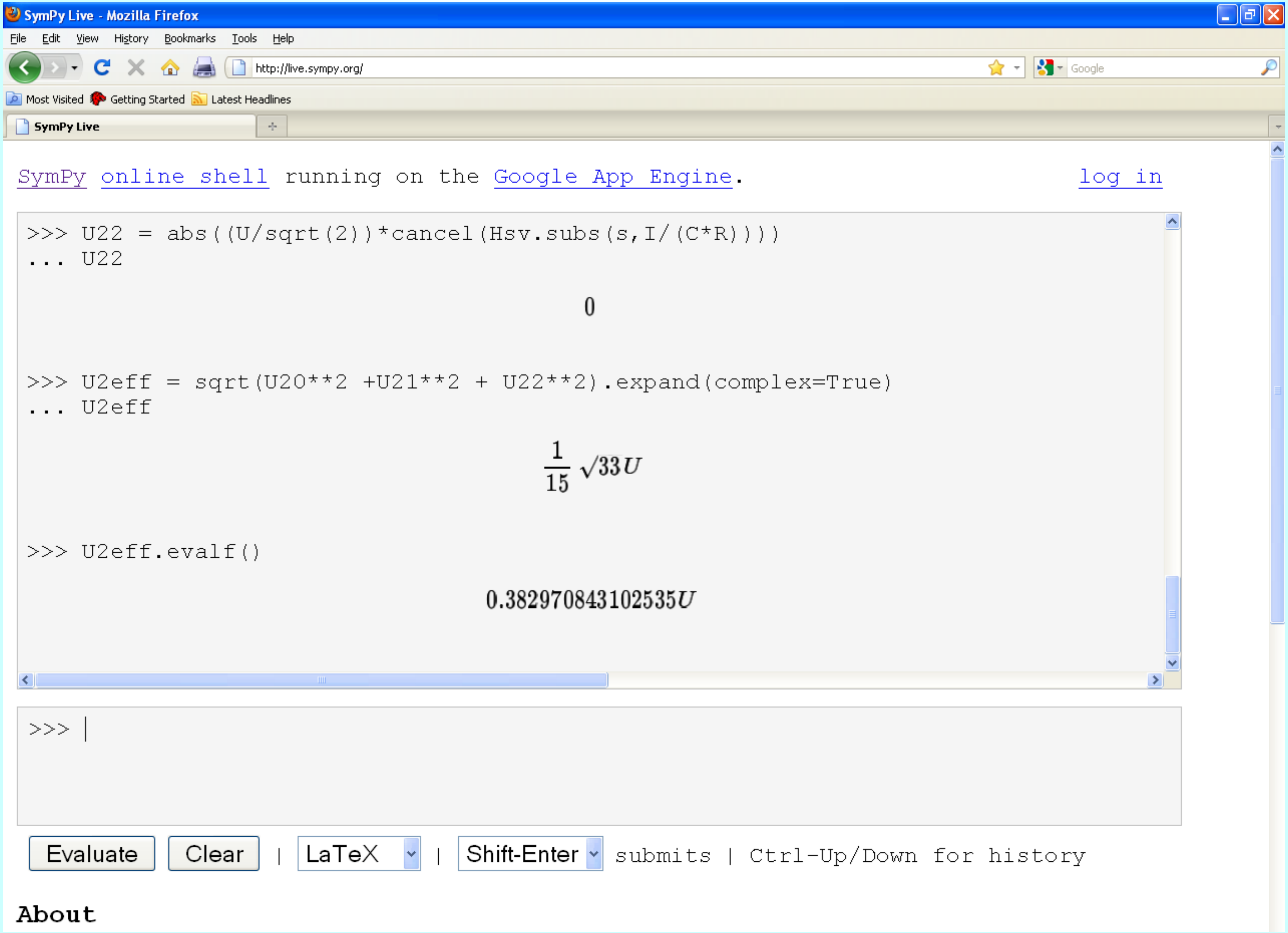
```
>>>
```

Evaluate | Clear | LaTeX | Shift-Enter submits | Ctrl-Up/Down for history

About


SymPy Live - Mozilla Firefox
File Edit View History Bookmarks Tools Help
http://live.sympy.org/
Google
Most Visited Getting Started Latest Headlines
SymPy Live
SymPy online shell running on the Google App Engine.
log in
$\left\{ -\frac{1}{CR} : 2 \right\}$
>>> Hw = Hsv.subs({s:I*w})
... Hw
$\frac{-C^2R^2w^2+1}{3C^2R^2w^2+6\imath CRw+3}$
>>> var('U', positive=True)
... U.assumptions0
{ commutative : True, complex : True, imaginary : False, negative : False, nonnegative : True, non
>>>
Evaluate
Clear
LaTeX
Shift-Enter
submits | Ctrl-Up/Down for history
About


SymPy Live - Mozilla Firefox
File Edit View History Bookmarks Tools Help
http://live.sympy.org/
Google
Most Visited Getting Started Latest Headlines
SymPy Live
SymPy online shell running on the Google App Engine.
log in
>>> U20 = abs(U*Hsv.subs(s,0))
... U20
$\frac{1}{3}U$
>>> U21 = abs((U/sqrt(2))*cancel(Hsv.subs(s,I/(3*C*R))))
... U21
$2\left|\frac{\sqrt{2}U}{12+9\imath}\right|$
>>> U22 = abs((U/sqrt(2))*cancel(Hsv.subs(s,I/(C*R))))
... U22
0
>>>
Evaluate
Clear
LaTeX
Shift-Enter
submits | Ctrl-Up/Down for history
About


SymPy Live - Mozilla Firefox
File Edit View History Bookmarks Tools Help
http://live.sympy.org/
Google
Most Visited
Getting Started
Latest Headlines
SymPy Live
SymPy online shell running on the Google App Engine.
log in
>>> U22 = abs((U/sqrt(2))*cancel(Hsv.subs(s,I/(C*R))))
... U22
0
>>> U2eff = sqrt(U20**2 +U21**2 + U22**2).expand(complex=True)
... U2eff
$\frac{1}{15}\sqrt{33}U$
>>> U2eff.evalf()
$0.382970843102535U$
>>>
Evaluate
Clear
LaTeX
Shift-Enter
submits | Ctrl-Up/Down for history
About