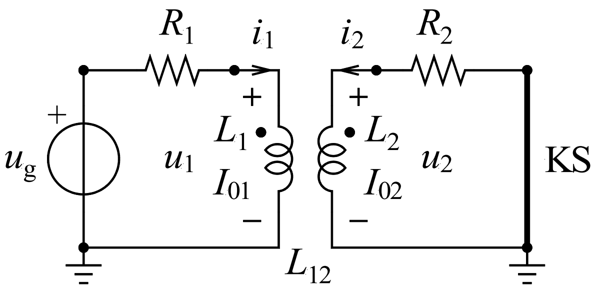
Задатак

Електроенергетски трансформатор је идеализовано представљен линеарним индуктивним трансформатором $L_1 = L$, $L_2 = L$, $k = \frac{1}{2}$, и отпорностима губитака $R_1 = R$, $R_2 = R$. Секундар је краткоспојен а примар је побуђен напонским извором импулсног напона $u_g(t) = \Phi\,\delta(t)$.
Почетне струје примара и секундара су $i_1(t_0^-) = I_{01}$, $i_2(t_0^-) = 0$, $t_0 = 0$.
Одредити ред овог електричног кола и једначине стања у матричном облику.
Одредити струју примара i_1 и њен домен.
Одредити струју секундара i_2 и њен домен.



Решење

Систем једначина кола је

$$u_g = R_1\, i_1 + u_1$$

$$0 = R_2\, i_2 + u_2$$

$$u_1 = L_1 \frac{di_1}{dt} + L_{12} \frac{di_2}{dt}$$

$$u_2 = L_{12} \frac{di_1}{dt} + L_2 \frac{di_2}{dt}$$

Заменом задатих вредности елемената, $R_1 = R$, $R_2 = R$, $L_1 = L$, $L_2 = L$, $k = \frac{1}{2}$, добија се $L_{12} = k\sqrt{L_1 L_2} = \frac{1}{2} L$ и систем једначина кола се своди на

$$u_g = R\, i_1 + u_1$$

$$0 = R\, i_2 + u_2$$

$$u_1 = L \frac{di_1}{dt} + \frac{1}{2} L \frac{di_2}{dt}$$

$$u_2 = \frac{1}{2} L \frac{di_1}{dt} + L \frac{di_2}{dt}$$

Природни почетни услови су $i_1(t_0^-) = I_{01}$, $i_2(t_0^-) = I_{02} = 0$. Почетни тренутак је $t_0 = 0$. Систем једначина кола решавамо за $t > t_0$.

Уводимо смене $\frac{di_1}{dt} = D_1$, $\frac{di_2}{dt} = D_2$, и решавамо систем алгебарских једначина.

$$u_g = R\, i_1 + u_1$$

$$0 = R\, i_2 + u_2$$

$$u_1 = L\, D_1 + \frac{1}{2} L\, D_2$$

$$u_2 = \frac{1}{2} L\, D_1 + L\, D_2$$

$$u_g - R\,i_1 = L\,D_1 + \frac{1}{2}\,L\,D_2$$

$$-R\,i_2 = \frac{1}{2}\,L\,D_1 + L\,D_2$$

$$D_1 + \frac{1}{2}\,D_2 = \frac{u_g}{L} - \frac{R}{L}\,i_1$$

$$\frac{1}{2}\,D_1 + D_2 = \frac{-R}{L}\,i_2$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{vmatrix} = \frac{3}{4},\ \Delta_1 = \begin{vmatrix} \frac{u_g}{L} - \frac{R}{L}\,i_1 & \frac{1}{2} \\ \frac{-R}{L}\,i_2 & 1 \end{vmatrix} = \frac{u_g}{L} - \frac{R}{L}\,i_1 + \frac{R}{2\,L}\,i_2,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & \frac{u_g}{L} - \frac{R}{L}\,i_1 \\ \frac{1}{2} & \frac{-R}{L}\,i_2 \end{vmatrix} = \frac{-R}{L}\,i_2 - \frac{u_g}{2\,L} + \frac{R}{2\,L}\,i_1$$

$$D_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = -\frac{4\,R}{3\,L}\,i_1 + \frac{2\,R}{3\,L}\,i_2 + \frac{4\,u_g}{3\,L},\ D_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{2\,R}{3\,L}\,i_1 - \frac{4\,R}{3\,L}\,i_2 - \frac{2\,u_g}{3\,L}$$

Систем једначина стања је

$$\frac{di_1}{dt} = -\frac{4\,R}{3\,L}\,i_1 + \frac{2\,R}{3\,L}\,i_2 + \frac{4}{3\,L}\,u_g$$

$$\frac{di_2}{dt} = \frac{2\,R}{3\,L}\,i_1 - \frac{4\,R}{3\,L}\,i_2 - \frac{2}{3\,L}\,u_g$$

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-4\,R}{3\,L} & \frac{2\,R}{3\,L} \\ \frac{2\,R}{3\,L} & \frac{-4\,R}{3\,L} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{4}{3\,L}\,u_g \\ \frac{-2}{3\,L}\,u_g \end{bmatrix}$$

Ред електричног кола је два.

Анализа помоћу унилатералне Лапласове трансформације је делотворан и учинковит поступак за решавање линеарних временски-непроменљивих електричних кола. Користићемо Лапласову трансформацију за одређивање одзива.

Директна унилатерална Лапласова трансформација је $\underline{U}(\underline{s}) = \mathrm{LT}(u(t)) = \int_{0^-}^{\infty} u(t)\,e^{-\underline{s}\,t}\,dt$, $\underline{s}$ је Лапласова промењива, коју још називамо комплексна учестаност, а $(u(t),\ \underline{U}(\underline{s}))$ је Лапласов трансформациони пар.

Зато што је трансформација једнозначна можемо је применити на обе стране једначине кола.

$$\mathrm{LT}(u_g) = \mathrm{LT}(R_1\,i_1 + u_1)$$

$$\mathrm{LT}(0) = \mathrm{LT}(R_2\,i_2 + u_2)$$

$$\mathrm{LT}(u_1) = \mathrm{LT}\left(L_1\,\frac{di_1}{dt} + L_{12}\,\frac{di_2}{dt}\right)$$

$$\mathrm{LT}(u_2) = \mathrm{LT}\left(L_{12}\,\frac{di_1}{dt} + L_2\,\frac{di_2}{dt}\right)$$

Зато што је трансформација линеарна систем једначина се своди на

$$\underline{U}_g(\underline{s}) = R_1\,\underline{I}_1(\underline{s}) + \underline{U}_1(\underline{s})$$

$$0 = R_2\,\underline{I}_2(\underline{s}) + \underline{U}_2(\underline{s})$$

$$\underline{U}_1(\underline{s}) = L_1\,\mathrm{LT}\left(\frac{di_1}{dt}\right) + L_{12}\,\mathrm{LT}\left(\frac{di_2}{dt}\right)$$

$$\underline{U}_2(\underline{s}) = L_{12}\,\mathrm{LT}\left(\frac{di_1}{dt}\right) + L_2\,\mathrm{LT}\left(\frac{di_2}{dt}\right)$$

На основу става о пресликавању првог извода по времену добија се комплексан систем једначина кола.

$$\underline{U}_g(\underline{s}) = R_1\, \underline{I}_1(\underline{s}) + \underline{U}_1(\underline{s})$$

$$0 = R_2\, \underline{I}_2(\underline{s}) + \underline{U}_2(\underline{s})$$

$$\underline{U}_1(\underline{s}) = L_1(\underline{s}\, \underline{I}_1(\underline{s}) - I_{01}) + L_{12}(\underline{s}\, \underline{I}_2(\underline{s}) - I_{02})$$

$$\underline{U}_2(\underline{s}) = L_{12}(\underline{s}\, \underline{I}_1(\underline{s}) - I_{01}) + L_2(\underline{s}\, \underline{I}_2(\underline{s}) - I_{02})$$

Природни почетни услови су аутоматски укључени у комплексан систем једначина кола.

$$\underline{U}_g(\underline{s}) - R_1\, \underline{I}_1(\underline{s}) = L_1(\underline{s}\, \underline{I}_1(\underline{s}) - I_{01}) + L_{12}(\underline{s}\, \underline{I}_2(\underline{s}) - I_{02})$$

$$-R_2\, \underline{I}_2(\underline{s}) = L_{12}(\underline{s}\, \underline{I}_1(\underline{s}) - I_{01}) + L_2(\underline{s}\, \underline{I}_2(\underline{s}) - I_{02})$$

У даљем раду ћемо изоставити запис $(\underline{s})$ ради сажетијег писања израза и једначина.

$$\underline{U}_g - R_1\, \underline{I}_1 = L_1(\underline{s}\, \underline{I}_1 - I_{01}) + L_{12}(\underline{s}\, \underline{I}_2 - I_{02})$$

$$-R_2\, \underline{I}_2 = L_{12}(\underline{s}\, \underline{I}_1 - I_{01}) + L_2(\underline{s}\, \underline{I}_2 - I_{02})$$

Добија се систем линеарних једначина са две непознате.

$$(L_1\, \underline{s} + R_1)\, \underline{I}_1 + L_{12}\, \underline{s}\, \underline{I}_2 = \underline{U}_g + L_1\, I_{01} + L_{12}\, I_{02}$$

$$L_{12}\, \underline{s}\, \underline{I}_1 + (L_2\, \underline{s} + R_2)\, \underline{I}_2 = L_{12}\, I_{01} + L_2\, I_{02}$$

Заменом параметара добије се

$$(L\underline{s} + R)\, \underline{I}_1 + \frac{1}{2}\, L\underline{s}\, \underline{I}_2 = \underline{U}_g + L\, I_{01}$$

$$\frac{1}{2}\, L\underline{s}\, \underline{I}_1 + (L\underline{s} + R)\, \underline{I}_2 = \frac{1}{2}\, L\, I_{01}$$

Комплексна побуда је

$$\underline{U}_g = \mathrm{LT}\big(u_g(t)\big) = \mathrm{LT}(\Phi\, \delta(t)) = \Phi\, \mathrm{LT}(\delta(t)) = \Phi$$

Систем се може решити, на пример, применом Крамерових правила.

$$\Delta = \begin{vmatrix} (L\underline{s} + R) & \frac{1}{2}\, L\underline{s} \\ \frac{1}{2}\, L\underline{s} & (L\underline{s} + R) \end{vmatrix} = (L\underline{s} + R)^2 - \left(\frac{1}{2}\, L\underline{s}\right)^2,$$

$$\Delta = \left(L\underline{s} + R - \frac{1}{2}\, L\underline{s}\right)\left(L\underline{s} + R + \frac{1}{2}\, L\underline{s}\right) = \left(\frac{1}{2}\, L\underline{s} + R\right)\left(\frac{3}{2}\, L\underline{s} + R\right)$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} \Phi + L\, I_{01} & \frac{1}{2}\, L\underline{s} \\ \frac{1}{2}\, L\, I_{01} & (L\underline{s} + R) \end{vmatrix} = (\Phi + L\, I_{01})\, (L\underline{s} + R) - \frac{1}{2}\, L\underline{s}\, \frac{1}{2}\, L\, I_{01},$$

$$\Delta_1 = \left((\Phi + L\, I_{01}) - \frac{1}{4}\, L\, I_{01}\right) L\underline{s} + (\Phi + L\, I_{01})\, R = \left(\Phi + \frac{3}{4}\, L\, I_{01}\right) L\underline{s} + (\Phi + L\, I_{01})\, R,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} (L\underline{s} + R) & \Phi + L\, I_{01} \\ \frac{1}{2}\, L\underline{s} & \frac{1}{2}\, L\, I_{01} \end{vmatrix} = (L\underline{s} + R)\, \frac{1}{2}\, L\, I_{01} - (\Phi + L\, I_{01})\, \frac{1}{2}\, L\underline{s},$$

$$\Delta_2 = \left(\frac{1}{2}\, L\, I_{01} - (\Phi + L\, I_{01})\, \frac{1}{2}\right) L\underline{s} + R\, \frac{1}{2}\, L\, I_{01} = -\frac{1}{2}\, \Phi\, L\underline{s} + R\, \frac{1}{2}\, L\, I_{01}$$

Комплексан одзив је

$$\underline{I}_1 = \frac{\left(\Phi + \frac{3}{4}\, L\, I_{01}\right) L\underline{s} + (\Phi + L\, I_{01})\, R}{\left(\frac{1}{2}\, L\underline{s} + R\right)\left(\frac{3}{2}\, L\underline{s} + R\right)} = \frac{\left(\Phi + \frac{3}{4}\, L\, I_{01}\right) L\underline{s} + (\Phi + L\, I_{01})\, R}{\frac{1}{2}\, L\left(\underline{s} + \frac{2\, R}{L}\right) \frac{3}{2}\, L\left(\underline{s} + \frac{2\, R}{3\, L}\right)}$$

$$\underline{I}_2 = \frac{-\frac{1}{2}\,\Phi\,L\underline{s}+R\,\frac{1}{2}\,L\,I_{01}}{\left(\frac{1}{2}\,L\underline{s}+R\right)\left(\frac{3}{2}\,L\underline{s}+R\right)} = \frac{-\frac{1}{2}\,\Phi\,L\underline{s}+R\,\frac{1}{2}\,L\,I_{01}}{\frac{1}{2}\,L\left(\underline{s}+\frac{2R}{L}\right)\frac{3}{2}\,L\left(\underline{s}+\frac{2R}{3L}\right)}$$

Струја примара је инверзна трансформација комплексне струје примара.

$$i_1(t) = \mathrm{LT}^{-1}(\underline{I}_1) = \frac{4}{3L^2}\,\mathrm{LT}^{-1}\left(\frac{\left(\Phi+\frac{3}{4}\,L\,I_{01}\right)L\underline{s}+(\Phi+L\,I_{01})\,R}{\left(\underline{s}+\frac{2R}{L}\right)\left(\underline{s}+\frac{2R}{3L}\right)}\right)$$

Инверзну трансформацију одређујемо преко својстава, ставова (теорема), и табеле парова. У табели постоји пар

In[1]:=
```
(p + q s)/((s + a) (s + b)) == LT[InverseLaplaceTransform[(p + q s)/((s + a) (s + b)), s, t]] // TraditionalForm
```

Out[1]//TraditionalForm=

$$\frac{p+q\,s}{(a+s)\,(b+s)} = \mathrm{LT}\left(\frac{e^{-a\,t}\,(a\,q-p)}{a-b}+\frac{e^{-b\,t}\,(p-b\,q)}{a-b}\right)$$

Комплексну струју преуређујемо на облик који одговара облику из табеле парова. Препознајемо коефицијенте из табеле. Овакав поступак се назива уклапање образаца (pattern matching).

$$a = \frac{2R}{L},\; b = \frac{2R}{3L},\;\; p = (\Phi+L\,I_{01})\,R,\;\; q = \left(\Phi+\frac{3}{4}\,L\,I_{01}\right)L$$

$$a-b = \frac{2R}{L} - \frac{2R}{3L} = \frac{4R}{3L}$$

$$a\,q-p = \frac{2R}{L}\left(\Phi+\frac{3}{4}\,L\,I_{01}\right)L - (\Phi+L\,I_{01})\,R = \left(\Phi+\frac{1}{2}\,L\,I_{01}\right)R$$

$$p-b\,q = (\Phi+L\,I_{01})\,R - \frac{2R}{3L}\left(\Phi+\frac{3}{4}\,L\,I_{01}\right)L = \left(\frac{1}{3}\,\Phi+\frac{1}{2}\,L\,I_{01}\right)R$$

Струју (тренутну вредност струје, струју у временском домену) одређујемо из Лапласовог трансформационог пара заменом коефицијената конкретним вредностима.

$$i_1(t) = \frac{4}{3L^2}\,\frac{\left(\Phi+\frac{1}{2}\,L\,I_{01}\right)R}{\frac{4R}{3L}}\,e^{\frac{-2R}{L}\,t} + \frac{4}{3L^2}\,\frac{\left(\frac{1}{3}\,\Phi+\frac{1}{2}\,L\,I_{01}\right)R}{\frac{4R}{3L}}\,e^{\frac{-2R}{3L}\,t}$$

$$i_1(t) = \left(\frac{\Phi}{L}+\frac{1}{2}\,I_{01}\right)e^{\frac{-2R}{L}\,t} + \left(\frac{1}{3}\,\frac{\Phi}{L}+\frac{1}{2}\,I_{01}\right)e^{\frac{-2R}{3L}\,t}$$

Додајемо генералисане функције и домен.

$$i_1(t) = \frac{1}{2}\,I_{01}\left(e^{\frac{-2R}{3L}\,t}+e^{\frac{-2R}{L}\,t}\right)+\frac{\Phi}{L}\left(\frac{1}{3}\,e^{\frac{-2R}{3L}\,t}+e^{\frac{-2R}{L}\,t}\right)\vartheta(t),$$
$$t \geq t_0 = 0$$

Исти поступак примењујемо за одређивање струје секундара.

$$i_2(t) = \mathrm{LT}^{-1}(\underline{I}_2) = \frac{4}{3L^2}\,\mathrm{LT}^{-1}\left(\frac{-\frac{1}{2}\,\Phi\,L\underline{s}+R\,\frac{1}{2}\,L\,I_{01}}{\left(\underline{s}+\frac{2R}{L}\right)\left(\underline{s}+\frac{2R}{3L}\right)}\right)$$

In[2]:=
```
(p + q s)/((s + a) (s + b)) == LT[InverseLaplaceTransform[(p + q s)/((s + a) (s + b)), s, t]] // TraditionalForm
```

Out[2]//TraditionalForm=

$$\frac{p+q\,s}{(a+s)\,(b+s)} = \mathrm{LT}\left(\frac{e^{-a\,t}\,(a\,q-p)}{a-b}+\frac{e^{-b\,t}\,(p-b\,q)}{a-b}\right)$$

$$a = \frac{2R}{L},\ b = \frac{2R}{3L},\ \ p = R\,\frac{1}{2}\,L\,I_{01},\ \ q = -\frac{1}{2}\,\Phi\,L$$

$$a - b = \frac{2R}{L} - \frac{2R}{3L} = \frac{4R}{3L}$$

$$a\,q - p = \frac{2R}{L}\left(-\frac{1}{2}\,\Phi\,L\right) - R\,\frac{1}{2}\,L\,I_{01} = -\left(\Phi + \frac{1}{2}\,L\,I_{01}\right)R$$

$$p - b\,q = R\,\frac{1}{2}\,L\,I_{01} - \frac{2R}{3L}\left(-\frac{1}{2}\,\Phi\,L\right) = \left(\frac{1}{2}\,L\,I_{01} + \frac{1}{3}\,\Phi\right)R$$

$$i_2(t) = \frac{4}{3L^2}\,\frac{-\left(\Phi+\frac{1}{2}\,L\,I_{01}\right)R}{\frac{4R}{3L}}\,e^{\frac{-2R}{L}\,t} + \frac{4}{3L^2}\,\frac{\left(\frac{1}{2}\,L\,I_{01}+\frac{1}{3}\,\Phi\right)R}{\frac{4R}{3L}}\,e^{\frac{-2R}{3L}\,t}$$

$$i_2(t) = -\left(\frac{\Phi}{L} + \frac{1}{2}\,I_{01}\right)e^{\frac{-2R}{L}\,t} + \left(\frac{1}{2}\,I_{01} + \frac{1}{3}\,\frac{\Phi}{L}\right)e^{\frac{-2R}{3L}\,t}$$

$$i_2(t) = \frac{1}{2}\,I_{01}\left(e^{\frac{-2R}{3L}\,t} - e^{\frac{-2R}{L}\,t}\right) + \frac{\Phi}{L}\left(\frac{1}{3}\,e^{\frac{-2R}{3L}\,t} - e^{\frac{-2R}{L}\,t}\right)\vartheta(t),$$

$$t \geq t_0 = 0$$

Струје трансформатора се могу одредити и из једначина стања.

Аутоматизована симболичка рачунарска анализа

```
In[3]:= $Assumptions = {L > 0, R > 0};

In[4]:= slog =
          {Di1 → D[Subscript[i, 1][t], t], Di2 → D[Subscript[i, 2][t], t], i1 → Subscript[i, 1],
           i2 → Subscript[i, 2], I01 → Subscript[Style["I", Italic], "01"],
           I02 → Subscript[Style["I", Italic], "02"], L1 → Subscript[L, 1],
           L2 → Subscript[L, 2], L12 → Subscript[L, 12],
           R1 → Subscript[R, 1], R2 → Subscript[R, 2], ug → Subscript[u, "g"],
           u1 → Subscript[u, 1], u2 → Subscript[u, 2]};

In[5]:= okvir[x_] := x // Style[#, 24] & // Framed[#, FrameStyle → Cyan] & // TraditionalForm

In[6]:= okvirY[x_] := x // Style[#, 24] & // Framed[#, FrameStyle → Yellow] & // TraditionalForm

In[7]:= zamenaLIT = {k → 1/2, L1 → L, L2 → L};

In[8]:= zamena =
         zamenaLIT ~ Join ~ {L12 → k Sqrt[L1 L2] /. zamenaLIT, R1 → R, R2 → R, I02 → 0} // Simplify

Out[8]= {k → 1/2, L1 → L, L2 → L, L12 → L/2, R1 → R, R2 → R, I02 → 0}
```

Једначине стања

```
In[9]:= jednacineD = {ug == R1 i1 + u1, 0 == R2 i2 + u2, u1 == L1 Di1 + L12 Di2, u2 == L12 Di1 + L2 Di2}

Out[9]= {ug == i1 R1 + u1, 0 == i2 R2 + u2, u1 == Di1 L1 + Di2 L12, u2 == Di1 L12 + Di2 L2}
```

In[10]:=
```
Column[jednacineD] /. slog // TraditionalForm
```

Out[10]//TraditionalForm=

$$u_g = i_1 R_1 + u_1$$
$$0 = i_2 R_2 + u_2$$
$$u_1 = L_1 i_1'(t) + L_{12} i_2'(t)$$
$$u_2 = L_{12} i_1'(t) + L_2 i_2'(t)$$

In[11]:=
```
jednacinei1i2 = Eliminate[jednacineD, {u1, u2}] /. zamena
```

Out[11]= $i2\,R == -\frac{Di1\,L}{2} - Di2\,L\ \&\&\ ug == Di1\,L + \frac{Di2\,L}{2} + i1\,R$

In[12]:=
```
odzivDi1Di2 = Solve[jednacinei1i2, {Di1, Di2}] // Expand
```

Out[12]= $\left\{\left\{Di1 \to -\frac{4\,i1\,R}{3\,L} + \frac{2\,i2\,R}{3\,L} + \frac{4\,ug}{3\,L},\ Di2 \to \frac{2\,i1\,R}{3\,L} - \frac{4\,i2\,R}{3\,L} - \frac{2\,ug}{3\,L}\right\}\right\}$

In[13]:=
```
odzivD = Collect[First[odzivDi1Di2], {i1, i2}]
```

Out[13]= $\left\{Di1 \to -\frac{4\,i1\,R}{3\,L} + \frac{2\,i2\,R}{3\,L} + \frac{4\,ug}{3\,L},\ Di2 \to \frac{2\,i1\,R}{3\,L} - \frac{4\,i2\,R}{3\,L} - \frac{2\,ug}{3\,L}\right\}$

In[14]:=
```
Column[odzivD /. zamena] /. Rule → Equal /. slog // okvir
```

Out[14]//TraditionalForm=

$$\boxed{\begin{array}{l} i_1'(t) = \frac{4\,u_g}{3\,L} - \frac{4\,i_1\,R}{3\,L} + \frac{2\,i_2\,R}{3\,L} \\ i_2'(t) = -\frac{2\,u_g}{3\,L} + \frac{2\,i_1\,R}{3\,L} - \frac{4\,i_2\,R}{3\,L} \end{array}}$$

Анализа помоћу унилатералне Лапласове трансформације

In[15]:=
```
ug = Φ DiracDelta[t]; TraditionalForm[u"g"[t] == ug]
```

Out[15]//TraditionalForm=

$$u_g(t) = \Phi\,\delta(t)$$

In[16]:=
```
jednacine = {Ug == R1 I1 + U1, 0 == R2 I2 + U2,
    U1 == L1 (s I1 - I01) + L12 (s I2 - I02), U2 == L12 (s I1 - I01) + L2 (s I2 - I02)};
```

In[17]:=
```
sZamena = {I1 → Subscript[Style["I", {Underlined, Italic}], 1][Style[s, Underlined]],
    I2 → Subscript[Style["I", {Underlined, Italic}], 2][Style[s, Underlined]], I01 →
     Subscript[Style["I", Italic], "01"], I02 → Subscript[Style["I", Italic], "02"],
    L1 → Subscript[Style["L", Italic], 1], L2 → Subscript[Style["L", Italic], 2],
    L12 → Subscript[Style["L", Italic], 12], R1 → Subscript[Style["R", Italic], 1],
    R2 → Subscript[Style["R", Italic], 2], s → Style[s, Underlined],
    U1 → Subscript[Style["U", {Underlined, Italic}], 1][Style[s, Underlined]],
    U2 → Subscript[Style["U", {Underlined, Italic}], 2][Style[s, Underlined]],
    Ug → Subscript[Style["U", {Underlined, Italic}], "g"][Style[s, Underlined]],
    Rule → Equal};
```

Комплексан систем једначина кола у области унилатералне Лапласове трансформације је

In[18]:=
```
Column[jednacine] /. sZamena // TraditionalForm
```

Out[18]//TraditionalForm=

$$\underline{U}_{\mathrm{g}}(\underline{s}) = R_1\, \underline{I}_1(\underline{s}) + \underline{U}_1(\underline{s})$$
$$0 = R_2\, \underline{I}_2(\underline{s}) + \underline{U}_2(\underline{s})$$
$$\underline{U}_1(\underline{s}) = L_1\, (\underline{s}\, \underline{I}_1(\underline{s}) - I_{01}) + L_{12}\, (\underline{s}\, \underline{I}_2(\underline{s}) - I_{02})$$
$$\underline{U}_2(\underline{s}) = L_{12}\, (\underline{s}\, \underline{I}_1(\underline{s}) - I_{01}) + L_2\, (\underline{s}\, \underline{I}_2(\underline{s}) - I_{02})$$

In[19]:=
```
odzivOpsti = Solve[jednacine, {I1, I2, U1, U2}];
```

Комплексан одзив, у општем случају, се добија решавањем комплексног система једначина кола, који је систем алгебарских линеарних једначина.

In[20]:=
```
Column[odzivOpsti // First // FullSimplify] /. sZamena // TraditionalForm
```

Out[20]//TraditionalForm=

$$\underline{I}_1(\underline{s}) = \frac{L_1\, I_{01}\, (L_2\, \underline{s}+R_2)+L_{12}^2\, (-\underline{s})\, I_{01}+L_{12}\, R_2\, I_{02}+\underline{U}_{\mathrm{g}}(\underline{s})\, (L_2\, \underline{s}+R_2)}{R_1\, (L_2\, \underline{s}+R_2)+\underline{s}\, (L_1\, (L_2\, \underline{s}+R_2)-L_{12}^2\, \underline{s})}$$
$$\underline{I}_2(\underline{s}) = \frac{L_{12}\, R_1\, I_{01}+I_{02}\, (L_2\, R_1+L_{12}^2\, (-\underline{s})+L_1\, L_2\, \underline{s})-L_{12}\, \underline{s}\, \underline{U}_{\mathrm{g}}(\underline{s})}{R_1\, (L_2\, \underline{s}+R_2)+\underline{s}\, (L_1\, (L_2\, \underline{s}+R_2)-L_{12}^2\, \underline{s})}$$
$$\underline{U}_1(\underline{s}) = \frac{R_1\, I_{01}\, (L_{12}^2\, \underline{s}-L_1\, (L_2\, \underline{s}+R_2))+L_{12}\, R_1\, R_2\, (-I_{02})+\underline{s}\, \underline{U}_{\mathrm{g}}(\underline{s})\, (L_1\, R_2+L_{12}^2\, (-\underline{s})+L_1\, L_2\, \underline{s})}{R_1\, (L_2\, \underline{s}+R_2)+\underline{s}\, (L_1\, (L_2\, \underline{s}+R_2)-L_{12}^2\, \underline{s})}$$
$$\underline{U}_2(\underline{s}) = -\frac{R_2\, (L_{12}\, R_1\, I_{01}+I_{02}\, (L_2\, R_1+L_{12}^2\, (-\underline{s})+L_1\, L_2\, \underline{s})-L_{12}\, \underline{s}\, \underline{U}_{\mathrm{g}}(\underline{s}))}{R_1\, (L_2\, \underline{s}+R_2)+\underline{s}\, (L_1\, (L_2\, \underline{s}+R_2)-L_{12}^2\, \underline{s})}$$

In[21]:=
```
odzivUg = First[odzivOpsti] /. zamena // Simplify;
```

Заменом вредности елемената добија се комплексан одзив у посебном случају.

In[22]:=
```
Column[odzivUg] /. sZamena // TraditionalForm
```

Out[22]//TraditionalForm=

$$\underline{I}_1(\underline{s}) = \frac{L\, I_{01}\, (3\, L\, \underline{s}+4\, R)+4\, \underline{U}_{\mathrm{g}}(\underline{s})\, (L\, \underline{s}+R)}{3\, L^2\, \underline{s}^2+8\, L\, R\, \underline{s}+4\, R^2}$$
$$\underline{I}_2(\underline{s}) = \frac{2\, L\, (R\, I_{01}-\underline{s}\, \underline{U}_{\mathrm{g}}(\underline{s}))}{3\, L^2\, \underline{s}^2+8\, L\, R\, \underline{s}+4\, R^2}$$
$$\underline{U}_1(\underline{s}) = -\frac{L\, (3\, L\, \underline{s}+4\, R)\, (R\, I_{01}-\underline{s}\, \underline{U}_{\mathrm{g}}(\underline{s}))}{3\, L^2\, \underline{s}^2+8\, L\, R\, \underline{s}+4\, R^2}$$
$$\underline{U}_2(\underline{s}) = \frac{2\, L\, R\, (\underline{s}\, \underline{U}_{\mathrm{g}}(\underline{s})-R\, I_{01})}{3\, L^2\, \underline{s}^2+8\, L\, R\, \underline{s}+4\, R^2}$$

Комплексна побуда је

In[23]:=
```
Ugs = LaplaceTransform[ug, t, s]
```

Out[23]= Φ

In[24]:=
```
odziv = odzivUg /. Ug → Ugs // Factor;
```

Комплексан одзив за конкретну побуду је

In[25]:=
```
Column[odziv] /. sZamena // okvirY
```

Out[25]//TraditionalForm=

$$\boxed{\begin{aligned}
\underline{I}_1(\underline{s}) &= \frac{3\, L^2\, \underline{s}\, I_{01}+4\, L\, R\, I_{01}+4\, L\, \underline{s}\, \Phi+4\, R\, \Phi}{(L\, \underline{s}+2\, R)\, (3\, L\, \underline{s}+2\, R)}\\
\underline{I}_2(\underline{s}) &= \frac{2\, L\, (R\, I_{01}-\underline{s}\, \Phi)}{(L\, \underline{s}+2\, R)\, (3\, L\, \underline{s}+2\, R)}\\
\underline{U}_1(\underline{s}) &= -\frac{L\, (3\, L\, \underline{s}+4\, R)\, (R\, I_{01}-\underline{s}\, \Phi)}{(L\, \underline{s}+2\, R)\, (3\, L\, \underline{s}+2\, R)}\\
\underline{U}_2(\underline{s}) &= -\frac{2\, L\, R\, (R\, I_{01}-\underline{s}\, \Phi)}{(L\, \underline{s}+2\, R)\, (3\, L\, \underline{s}+2\, R)}
\end{aligned}}$$

In[26]:=
```
{I1s, I2s} = {I1, I2} /. odziv
```

Out[26]=
$$\left\{\frac{4\,\text{I01}\,L\,R+3\,\text{I01}\,L^2\,s+4\,R\,\Phi+4\,L\,s\,\Phi}{(2\,R+L\,s)\,(2\,R+3\,L\,s)},\ \frac{2\,L\,(\text{I01}\,R-s\,\Phi)}{(2\,R+L\,s)\,(2\,R+3\,L\,s)}\right\}$$

Одзив (временски одзив, потпун одзив), тренутне вредности, за $t > t_0$, односно за $t > 0$, је

In[27]:=
```
i1t = InverseLaplaceTransform[I1s, s, t] // Expand // Collect[#, ⅇ-] &
```

Out[27]=
$$e^{-\frac{2Rt}{3L}}\left(\frac{\text{I01}}{2}+\frac{\Phi}{3L}\right)+e^{-\frac{2Rt}{L}}\left(\frac{\text{I01}}{2}+\frac{\Phi}{L}\right)$$

In[28]:=
```
i2t = InverseLaplaceTransform[I2s, s, t] // Expand // Collect[#, ⅇ-] &
```

Out[28]=
$$e^{-\frac{2Rt}{L}}\left(-\frac{\text{I01}}{2}-\frac{\Phi}{L}\right)+e^{-\frac{2Rt}{3L}}\left(\frac{\text{I01}}{2}+\frac{\Phi}{3L}\right)$$

In[29]:=
```
Row[{Subscript[i, 1][t] == i1t, ",   ", t > 0} /. slog] // okvirY
```

Out[29]//TraditionalForm=
$$i_1(t)=e^{-\frac{2Rt}{3L}}\left(\frac{I_{01}}{2}+\frac{\Phi}{3L}\right)+e^{-\frac{2Rt}{L}}\left(\frac{I_{01}}{2}+\frac{\Phi}{L}\right),\quad t>0$$

In[30]:=
```
Row[{Subscript[i, 2][t] == i2t, ",   ", t > 0} /. slog] // okvir
```

Out[30]//TraditionalForm=
$$i_2(t)=e^{-\frac{2Rt}{L}}\left(-\frac{I_{01}}{2}-\frac{\Phi}{L}\right)+e^{-\frac{2Rt}{3L}}\left(\frac{I_{01}}{2}+\frac{\Phi}{3L}\right),\quad t>0$$

Одзив на конкретну побуду је дефинисан за $t \geq t_0$. Додаћемо множилац који садржи Хевисајдову функцију сабирцима који чине одзив на побуду. Препознаћемо сабирке у којима се појављује Φ.

In[31]:=
```
Row[{Subscript[i, 1][t] == Collect[(i1t /. Φ → 0), I01] +
     ϑ[t] Collect[(i1t /. I01 → 0), Φ/L], ",   ", t ≥ 0} /. slog] // okvir
```

Out[31]//TraditionalForm=
$$i_1(t)=I_{01}\left(\frac{1}{2}\,e^{-\frac{2Rt}{L}}+\frac{1}{2}\,e^{-\frac{2Rt}{3L}}\right)+\frac{\Phi\,\vartheta(t)\left(e^{-\frac{2Rt}{L}}+\frac{1}{3}\,e^{-\frac{2Rt}{3L}}\right)}{L},\quad t\geq 0$$

In[32]:=
```
Row[{Subscript[i, 2][t] == Collect[(i2t /. Φ → 0), I01] +
     ϑ[t] Collect[(i2t /. I01 → 0), Φ/L], ",   ", t ≥ 0} /. slog] // okvir
```

Out[32]//TraditionalForm=
$$i_2(t)=I_{01}\left(\frac{1}{2}\,e^{-\frac{2Rt}{3L}}-\frac{1}{2}\,e^{-\frac{2Rt}{L}}\right)+\frac{\Phi\,\vartheta(t)\left(\frac{1}{3}\,e^{-\frac{2Rt}{3L}}-e^{-\frac{2Rt}{L}}\right)}{L},\quad t\geq 0$$

Потпун (комплетан) одзив можемо раздвојити на два сабирка:
(1) одзив на почетне услове и
(2) одзив на побуду који садржи као множилац Хевисајдову јединичну одскочну функцију.

Домен потпуног одзива је $t \geq t_0$.

Предисторија електричног кола није позната јер не знамо како су настали почетни услови. Не познајемо потпун одзив за $t < t_0$.

Mathematica

```
In[33]:= $Version
Out[33]= 11.2.0 for Microsoft Windows (64-bit) (September 11, 2017)

In[34]:= DateString[]
Out[34]= Wed 13 Nov 2019 21:37:04
```

(%i1) load("C:\\SALECx\\SALECx.mac") $

Dejan Tosic, SALECx 2019 v1.0
Symbolic Analysis of Linear Electric Circuits with Maxima

(%i2) SALECxPrint: true $

(%i3) assume(L>0,R>0);

(%o3) $[L>0,R>0]$

(%i4) LIT_shema: [
 ["V", "Ug", 3, 0, Ug],
 ["R", "R1", 3, 1, R1],
 ["R", "R2", 2, 0, R2],
 ["K", "LIT", [1,0], [2,0], [L1,L2,L12], [Io1,Io2]]
],
[R1=R, R2=R,L1=L,L2=L,L12=(1/2)·sqrt(L·L)]$

(%i5) LIT_response: SALECx(LIT_shema);

Symbolic Analysis of Linear Electric Circuits with Maxima
SALECx version 1.0, Prof. Dr. Dejan Tošić, tosic@etf.rs
Number of nodes excluding 0 node: 3
Electric circuit specification: $[[V,Ug,3,0,Ug],[R,R1,3,1,R],[R,R2,2,0,R],[K,LIT,[1,0],[2,0],[L,L,\frac{L}{2}],[Io1,Io2]]]$

Supported element: $[true,true,true,true]$

Element values: $[Ug,R,R,[L,L,\frac{L}{2}]]$

Initial conditions: $[false,false,false,[Io1,Io2]]$

MNA equations: $[\frac{V_1-V_3}{R}+I_{LIT,1}=0,\frac{V_2}{R}+I_{LIT,2}=0,\frac{V_3-V_1}{R}+I_{Ug}=0,V_2=I_{LIT,2}\,L\,s+\frac{I_{LIT,1}\,L\,s}{2}-Io2\,L-\frac{Io1\,L}{2},V_1=\frac{I_{LIT,2}\,L\,s}{2}+I_{LIT,1}\,L\,s-\frac{Io2\,L}{2}-Io1\,L,V_3=Ug]$

MNA variables: $[V_1,V_2,V_3,I_{LIT,2},I_{LIT,1},I_{Ug}]$

(LIT_response) $$[V_1=-\frac{-3\,L^2\,Ug\,s^2+R\,(3\,Io1\,L^2-4\,L\,Ug)\,s+(2\,Io2+4\,Io1)\,L\,R^2}{3\,L^2\,s^2+8\,L\,R\,s+4\,R^2},V_2=-\frac{R\,(3\,Io2\,L^2-2\,L\,Ug)\,s+(4\,Io2+2\,Io1)\,L\,R^2}{3\,L^2\,s^2+8\,L\,R\,s+4\,R^2},V_3=Ug,I_{LIT,2}=\frac{(3\,Io2\,L^2-2\,L\,Ug)\,s+(4\,Io2+2\,Io1)\,L\,R}{3\,L^2\,s^2+8\,L\,R\,s+4\,R^2},I_{LIT,1}=\frac{(4\,L\,Ug+3\,Io1\,L^2)\,s+R\,(4\,Ug+(2\,Io2+4\,Io1)\,L)}{3\,L^2\,s^2+8\,L\,R\,s+4\,R^2},I_{Ug}=-\frac{(4\,L\,Ug+3\,Io1\,L^2)\,s+R\,(4\,Ug+(2\,Io2+4\,Io1)\,L)}{3\,L^2\,s^2+8\,L\,R\,s+4\,R^2}]$$

(%i6) Ugs: laplace(Phi·delta(t),t,s);

(Ugs) Φ

(%i7) LIT_response_Ug: LIT_response, Ug=Ugs, ratsimp;

(LIT_response_Ug)
$$[V_1=\frac{3\,L^2\,\Phi\,s^2+(4\,L\,\Phi-3\,Io1\,L^2)\,R\,s+(-2\,Io2-4\,Io1)\,L\,R^2}{3\,L^2\,s^2+8\,L\,R\,s+4\,R^2},V_2=\frac{(2\,L\,\Phi-3\,Io2\,L^2)\,R\,s+(-4\,Io2-2\,Io1)\,L\,R^2}{3\,L^2\,s^2+8\,L\,R\,s+4\,R^2},V_3=\Phi,I_{LIT,2}=-\frac{(2\,L\,\Phi-3\,Io2\,L^2)\,s+(-4\,Io2-2\,Io1)\,L\,R}{3\,L^2\,s^2+8\,L\,R\,s+4\,R^2},I_{LIT,1}=\frac{(4\,L\,\Phi+3\,Io1\,L^2)\,s+(4\,\Phi+(2\,Io2+4\,Io1)\,L)\,R}{3\,L^2\,s^2+8\,L\,R\,s+4\,R^2},I_{Ug}=-\frac{(4\,L\,\Phi+3\,Io1\,L^2)\,s+(4\,\Phi+(2\,Io2+4\,Io1)\,L)\,R}{3\,L^2\,s^2+8\,L\,R\,s+4\,R^2}]$$

(%i8) I1s: I["LIT",1], LIT_response_Ug;

(I1s)
$$\frac{(4\,L\,\Phi+3\,Io1\,L^2)\,s+(4\,\Phi+(2\,Io2+4\,Io1)\,L)\,R}{3\,L^2\,s^2+8\,L\,R\,s+4\,R^2}$$

(%i9) i1t: ilt(I1s,s,t), expand;

(i1t)
$$\frac{\Phi\,\%e^{-\frac{2\,R\,t}{3\,L}}}{3\,L}+\frac{Io2\,\%e^{-\frac{2\,R\,t}{3\,L}}}{2}+\frac{Io1\,\%e^{-\frac{2\,R\,t}{3\,L}}}{2}+\frac{\Phi\,\%e^{-\frac{2\,R\,t}{L}}}{L}-\frac{Io2\,\%e^{-\frac{2\,R\,t}{L}}}{2}+\frac{Io1\,\%e^{-\frac{2\,R\,t}{L}}}{2}$$

(%i10) collectterms(i1t,Io1,Io2,Phi);

(%o10)
$$\Phi\left(\frac{\%e^{-\frac{2\,R\,t}{3\,L}}}{3\,L}+\frac{\%e^{-\frac{2\,R\,t}{L}}}{L}\right)+Io1\left(\frac{\%e^{-\frac{2\,R\,t}{3\,L}}}{2}+\frac{\%e^{-\frac{2\,R\,t}{L}}}{2}\right)+Io2\left(\frac{\%e^{-\frac{2\,R\,t}{3\,L}}}{2}-\frac{\%e^{-\frac{2\,R\,t}{L}}}{2}\right)$$

(%i11) I2s: I["LIT",2], LIT_response_Ug;

(I2s)
$$-\frac{(2\,L\,\Phi-3\,Io2\,L^2)\,s+(-4\,Io2-2\,Io1)\,L\,R}{3\,L^2\,s^2+8\,L\,R\,s+4\,R^2}$$

(%i12) i2t: ilt(I2s,s,t), expand;

$$\text{(i2t)}\quad \frac{\Phi\,\%e^{-\frac{2\,R\,t}{3\,L}}}{3\,L}+\frac{Io2\,\%e^{-\frac{2\,R\,t}{3\,L}}}{2}+\frac{Io1\,\%e^{-\frac{2\,R\,t}{3\,L}}}{2}-\frac{\Phi\,\%e^{-\frac{2\,R\,t}{L}}}{L}+\frac{Io2\,\%e^{-\frac{2\,R\,t}{L}}}{2}-\frac{Io1\,\%e^{-\frac{2\,R\,t}{L}}}{2}$$

(%i13) collectterms(i2t,Io1,Io2,Phi);

$$\text{(\%o13)}\quad \Phi\left(\frac{\%e^{-\frac{2\,R\,t}{3\,L}}}{3\,L}-\frac{\%e^{-\frac{2\,R\,t}{L}}}{L}\right)+Io2\left(\frac{\%e^{-\frac{2\,R\,t}{3\,L}}}{2}+\frac{\%e^{-\frac{2\,R\,t}{L}}}{2}\right)+Io1\left(\frac{\%e^{-\frac{2\,R\,t}{3\,L}}}{2}-\frac{\%e^{-\frac{2\,R\,t}{L}}}{2}\right)$$

(%i14) i_1(t)=collectterms(i1t,Io1,Io2,Phi), Io2=0;

$$\text{(\%o14)}\quad i_1(t)=\Phi\left(\frac{\%e^{-\frac{2\,R\,t}{3\,L}}}{3\,L}+\frac{\%e^{-\frac{2\,R\,t}{L}}}{L}\right)+Io1\left(\frac{\%e^{-\frac{2\,R\,t}{3\,L}}}{2}+\frac{\%e^{-\frac{2\,R\,t}{L}}}{2}\right)$$

(%i15) i_2(t)=collectterms(i2t,Io1,Io2,Phi), Io2=0;

$$\text{(\%o15)}\quad i_2(t)=\Phi\left(\frac{\%e^{-\frac{2\,R\,t}{3\,L}}}{3\,L}-\frac{\%e^{-\frac{2\,R\,t}{L}}}{L}\right)+Io1\left(\frac{\%e^{-\frac{2\,R\,t}{3\,L}}}{2}-\frac{\%e^{-\frac{2\,R\,t}{L}}}{2}\right)$$