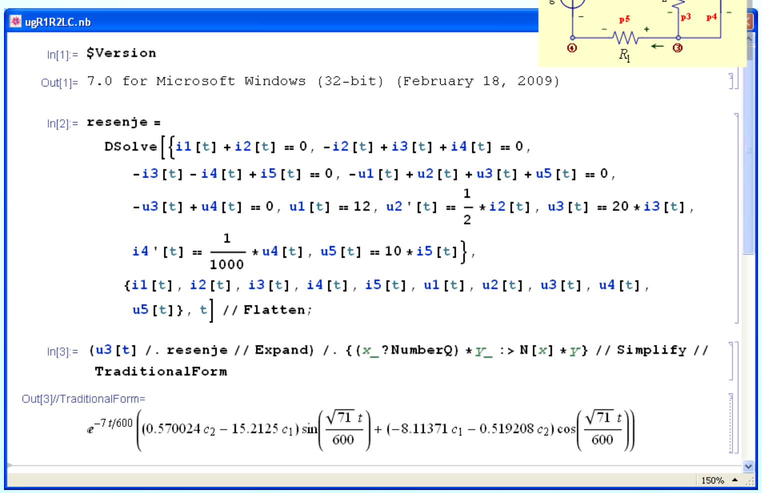
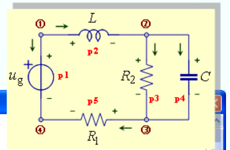
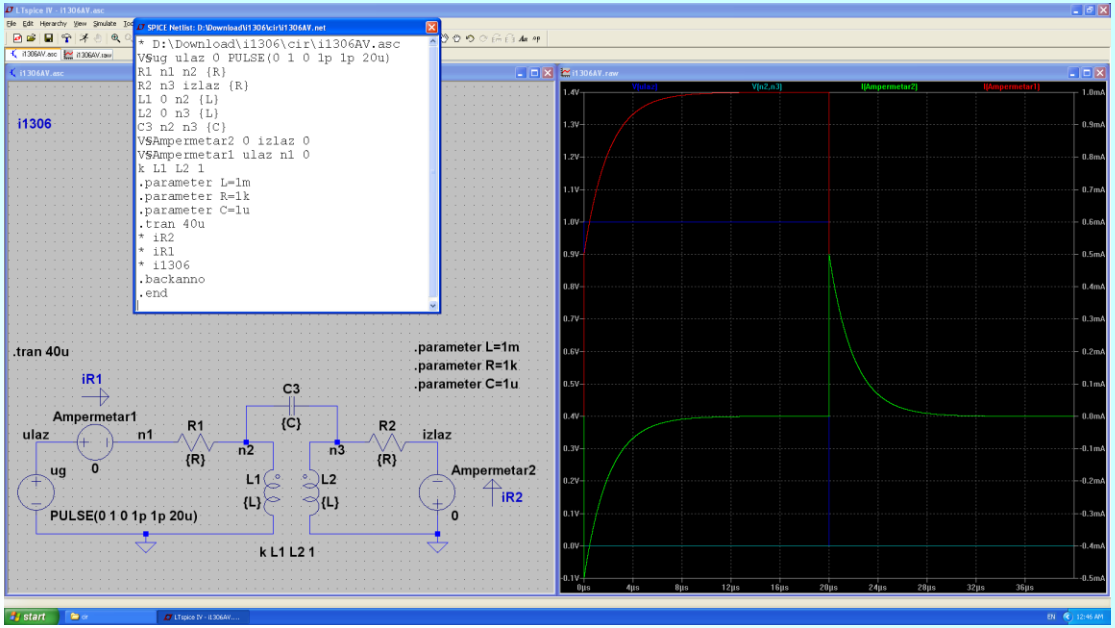
Теорија електричних кола





Милка Потребић



Решавање у временском домену

Једначине стања и једначина одзива

Конволуциони интеграл

Задатак (1)

Задатак 1

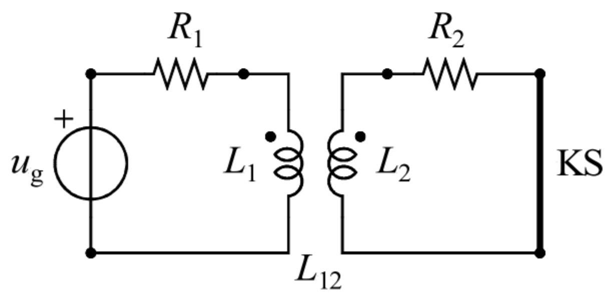
Електрично коло са слике има познате вредности елемената: $R_1 = R_2 = R$, $L_1 = L$. Трансформатор је симетричан са савршеном спрегом. Побуда је $u_\mathrm{g}(t) = U\,\mathrm{e}^{-at}\,\mathrm{h}(t)$,

$$a = \frac{R}{2L}.$$

(5) Одредити струју краткоспојника KS.

(5) Одредити ред кола.

(5) Нацртати граф кола.



Задатак 1

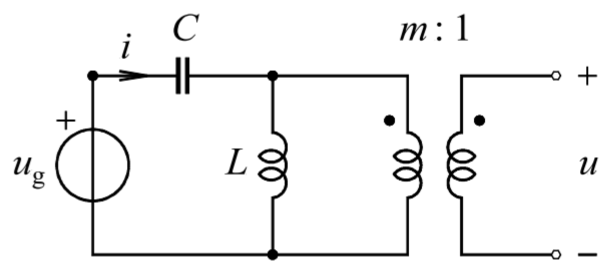
(5) Одредити једначину одзива за напон u електричног кола са слике. Вредности елемената и параметри побуде су познати,

$$u_\mathrm{g}(t) = U_\mathrm{m} \sin\left(\frac{1}{\sqrt{CL}}t\right)\mathrm{h}(t).$$

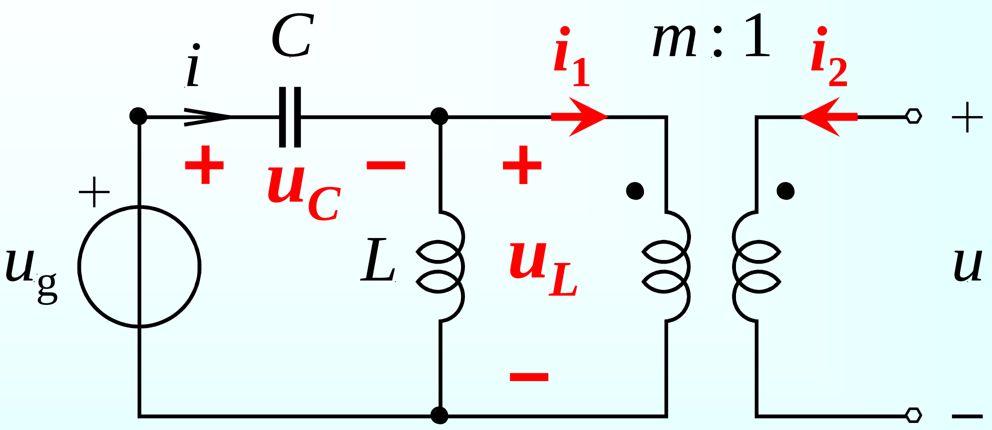
Нема сакупљене енергије.

(5) Одредити струју извора, i, и нацртати график струје извора.

(5) Како гласе једначине стања кола? Написати их у матричном облику.



Једначина одзива за струју извора



$$u_L = mu$$

$$i_1 = -\frac{1}{m} i_2$$

$$\boxed{i_2 = 0 \Rightarrow i_1 = 0}$$

$$\boxed{u_g = u_C + u_L}$$

$$u_L = L\mathrm{D}i_L = L\mathrm{D}i$$

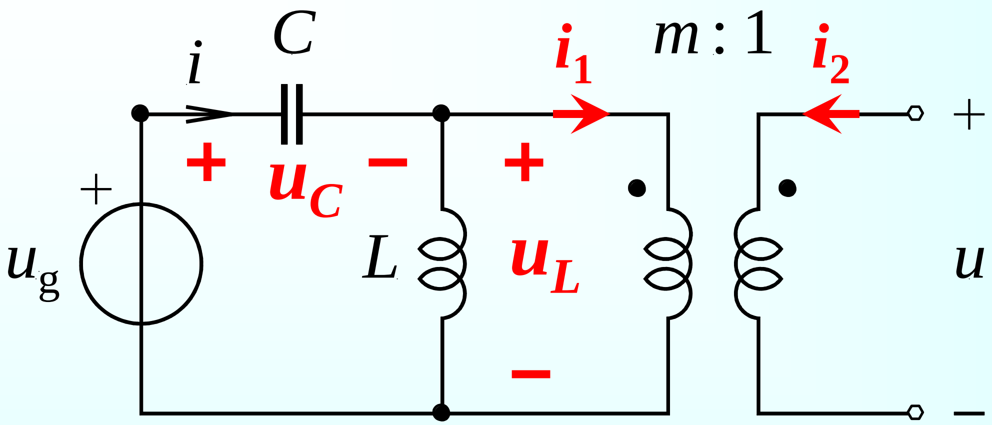
$$i_C = C\mathrm{D}u_C = i$$

$$u_g = u_C + L\mathrm{D}i \quad |\mathrm{D}$$

$$\mathrm{D}u_g = \overbrace{\mathrm{D}u_C}^{i/C} + L\mathrm{D}^2 i$$

$$\boxed{\mathrm{D}^2 i + \frac{1}{LC} i = \frac{1}{L} \mathrm{D}u_g}$$

Одређивање импулсног одзива



$$\boxed{\mathrm{D}^2 i+\frac{1}{LC}i=\frac{1}{L}\mathrm{D}u_{\mathrm{g}}}$$

$$u_{\mathrm{g}}(t)=\delta(t)\Rightarrow i(t)=g(t)$$

$$g(t)=z(t)\cdot h(t)+H_1\delta(t)$$

$$\mathrm{D}g(t)=\mathrm{D}z(t)h(t)+z(t)\mathrm{D}h(t)+H_1\mathrm{D}\delta(t)=\mathrm{D}z(t)h(t)+z\left(0^+\right)\delta(t)+H_1\mathrm{D}\delta(t)$$

$$\mathrm{D}^2 g(t)=\mathrm{D}^2 z(t)h(t)+\mathrm{D}z(t)\mathrm{D}h(t)+z\left(0^+\right)\mathrm{D}\delta(t)+H_1\mathrm{D}^2\delta(t)$$

$$\mathrm{D}^2 g(t)=\mathrm{D}^2 z(t)h(t)+\mathrm{D}z\left(0^+\right)\delta(t)+z\left(0^+\right)\mathrm{D}\delta(t)+H_1\mathrm{D}^2\delta(t)$$

$$\mathrm{D}^2 z(t)h(t)+\mathrm{D}z\left(0^+\right)\delta(t)+z\left(0^+\right)\mathrm{D}\delta(t)+H_1\mathrm{D}^2\delta(t)+\frac{1}{LC}\left(z(t)\cdot h(t)+H_1\delta(t)\right)=\frac{1}{L}\mathrm{D}\delta(t)$$

Сређивање једначине одзива

$$u_g(t)=\delta(t)\Rightarrow i(t)=g(t)$$

$$g(t)=z(t)\cdot h(t)+H_1\delta(t)$$

$$D^2z(t)h(t)+Dz(0^+)\delta(t)+z(0^+)D\delta(t)+H_1D^2\delta(t)+\frac{1}{LC}(z(t)h(t)+H_1\delta(t))=\frac{1}{L}D\delta(t)$$

$$\boxed{D^2z(t)+\frac{1}{LC}z(t)=0}$$

$$\boxed{Dz(0^+)+H_1\frac{1}{LC}=0}\Rightarrow\boxed{Dz(0^+)=0}$$

$$\boxed{z(0^+)=\frac{1}{L}}$$

$$\boxed{H_1=0}$$

Импулсни одзив за струју извора

$$g(t) = z(t)\cdot h(t) + H_1\delta(t) \qquad \boxed{H_1 = 0}$$

$$\boxed{\mathrm{D}^2 z(t) + \frac{1}{LC}z(t) = 0} \Rightarrow A(\underline{s}) = \underline{s}^2 + \frac{1}{LC} = 0 \Rightarrow \underline{s}_{1,2} = \pm\frac{\mathrm{j}}{\sqrt{LC}} = \pm\mathrm{j}\omega$$

$$z(t) = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)$$

$$\boxed{z(0^+) = \frac{1}{L}} \qquad z(0^+) = A\cos(\omega\cdot 0^+) + B\sin(\omega\cdot 0^+) = A = \frac{1}{L} \qquad \boxed{A = \frac{1}{L}}$$

$$\boxed{\mathrm{D}z(0^+) = 0} \qquad \mathrm{D}z(0^+) = -A\omega\sin(\omega\cdot t) + B\omega\cos(\omega\cdot t)\Big|_{t=0^+} = B\omega = 0 \qquad \boxed{B = 0}$$

$$\boxed{g(t) = z(t)\cdot h(t) = \frac{1}{L}\cos(\omega t)\cdot h(t)}$$

Конволуциони интеграл

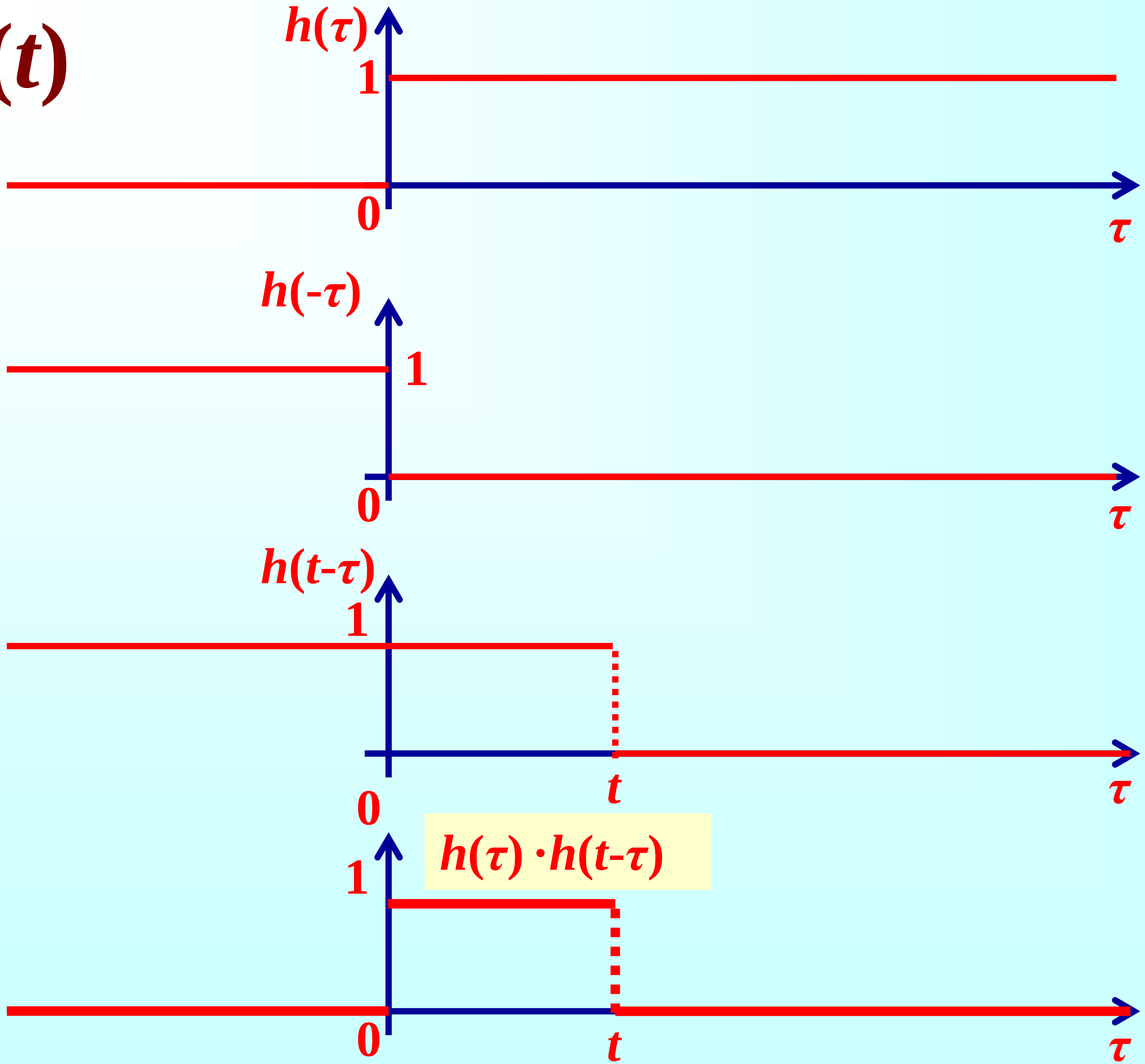
$$g(t) = z(t)\cdot h(t) = \frac{1}{L}\cos\left(\frac{1}{\sqrt{LC}}t\right)\cdot h(t)$$

$$u_{\mathrm{g}}(t) = U_{\mathrm{m}}\sin\left(\frac{1}{\sqrt{CL}}t\right)h(t)$$

$$i(t) = \int_0^t u_{\mathrm{g}}(\tau)g(t-\tau)\mathrm{d}\tau$$

$$i(t) = \int_0^t U_{\mathrm{m}}\sin\left(\frac{1}{\sqrt{CL}}\tau\right)\boxed{h(\tau)}\frac{1}{L}\cos\left(\frac{1}{\sqrt{CL}}(t-\tau)\right)\cdot\boxed{h(t-\tau)}\mathrm{d}\tau$$

$h(t)$



Конволуциони интеграл

$$\boxed{g(t)=z(t)\cdot h(t)=\frac{1}{L}\cos\left(\frac{1}{\sqrt{LC}}t\right)\cdot h(t)}$$

$$u_{\mathrm{g}}(t)=U_{\mathrm{m}}\sin\left(\frac{1}{\sqrt{CL}}t\right)h(t)$$

$$i(t)=\int_0^t u_{\mathrm{g}}(\tau)g(t-\tau)\mathrm{d}\tau=\int_0^t U_{\mathrm{m}}\sin\left(\frac{1}{\sqrt{CL}}\tau\right)\underbrace{\boxed{h(\tau)}}_{1}\frac{1}{L}\cos\left(\frac{1}{\sqrt{CL}}(t-\tau)\right)\cdot\underbrace{\boxed{h(t-\tau)}}_{1}\mathrm{d}\tau$$

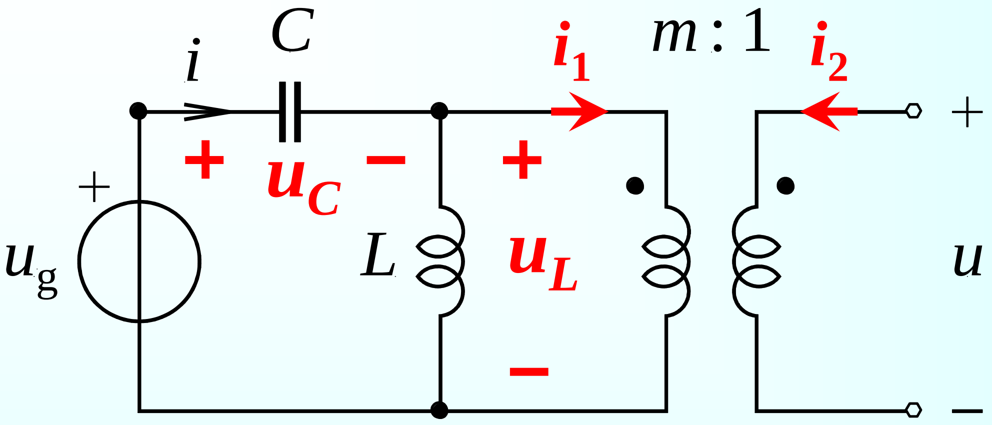
$$i(t)=\frac{U_{\mathrm{m}}}{L}\int_0^t\frac{1}{2}\left(\sin\left(\frac{1}{\sqrt{CL}}\tau+\frac{1}{\sqrt{CL}}(t-\tau)\right)+\sin\left(\frac{1}{\sqrt{CL}}\tau-\frac{1}{\sqrt{CL}}(t-\tau)\right)\right)\mathrm{d}\tau$$

$$i(t)=\frac{U_{\mathrm{m}}}{2L}\int_0^t\left(\sin\left(\frac{1}{\sqrt{CL}}t\right)+\sin\left(\frac{1}{\sqrt{CL}}(2\tau-t)\right)\right)\mathrm{d}\tau$$

$$i(t)=\frac{U_{\mathrm{m}}}{2L}\sin\left(\frac{1}{\sqrt{CL}}t\right)\cdot\tau\Big|_0^t-\frac{U_{\mathrm{m}}}{2L}\frac{\sqrt{CL}}{2}\cos\left(\frac{1}{\sqrt{CL}}(2\tau-t)\right)\Big|_0^t$$

$$\boxed{i(t)=\frac{U_{\mathrm{m}}}{2L}t\sin\left(\frac{1}{\sqrt{CL}}t\right)-\frac{U_{\mathrm{m}}}{2L}\frac{\sqrt{CL}}{2}\left(\cos\left(\frac{1}{\sqrt{CL}}(t)\right)-\cos\left(\frac{1}{\sqrt{CL}}(-t)\right)\right)=\frac{U_{\mathrm{m}}}{2L}t\sin\left(\frac{1}{\sqrt{CL}}t\right),t\ge 0}$$

Једначине стања



$$u_L = mu$$

$$i_1 = -\frac{1}{m} i_2$$

$$i_2 = 0 \Rightarrow i_1 = 0$$

$$u_{\mathrm{g}} = u_C + u_L$$

$$u_L = L\mathrm{D}i_L = L\mathrm{D}i$$

$$i_C = C\mathrm{D}u_C = i$$

$$u_{\mathrm{g}} = u_C + L\mathrm{D}i \Rightarrow \mathrm{D}i = -\frac{1}{L}u_C + 0 \cdot i + \frac{1}{L}u_{\mathrm{g}}$$

$$i_C = C\mathrm{D}u_C = i \Rightarrow \mathrm{D}u_C = 0 \cdot u_C + \frac{1}{C} i$$

$$\boxed{\mathrm{D}\begin{bmatrix} u_C \\ i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{C} \\ -\frac{1}{L} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_C \\ i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{L} u_{\mathrm{g}} \end{bmatrix}}$$

Задатак (7)

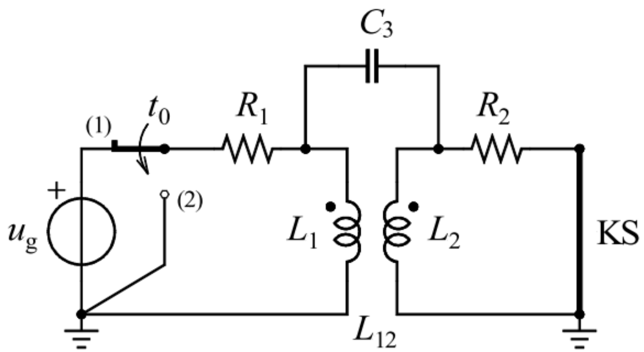
Задатак 1

Линеаран индуктиван трансформатор је симетричан, са савршеном спрегом, а индуктивност примара је L. Отпорности отпорника су R и $u_g = U$. Прекидач је у положају (1) и одзив је устаљен. У тренутку $t_0 = 0$ прекидач се пребацује у положај (2). Одредити

(5) природне почетне услове за тренутак t_0 и ред кола за $t > t_0$,

(5) струју кратког споја за $t > t_0$ и

(5) нацртати њен график.



Природни почетни услови су

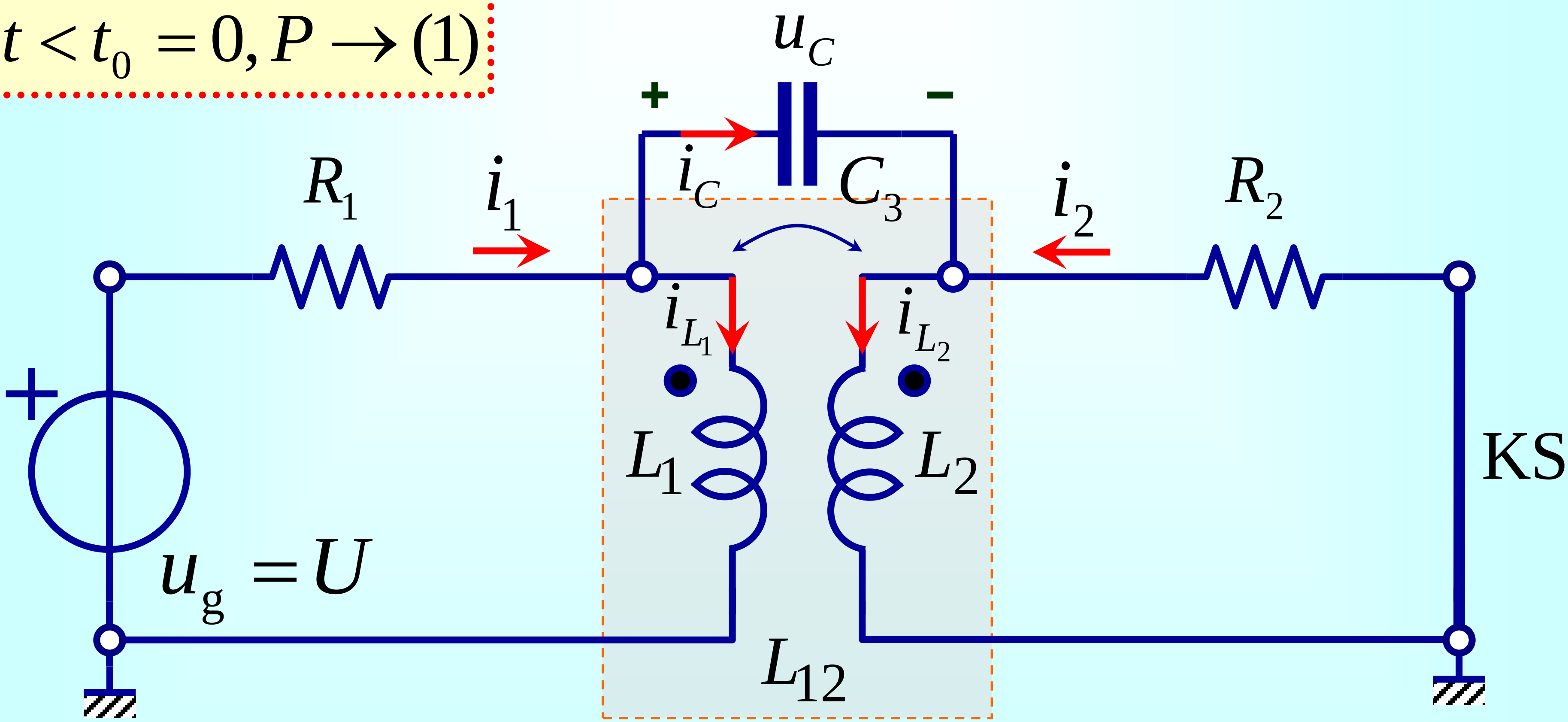
Ред кола је

Струја кратког споја је

График струје кратког споја је

Природни почетни услови

$$t < t_0 = 0, P \to (1)$$



линеарни индуктивни трансформатор
симетричан са савршеном спрегом

$$u_{L_1} = u_{L_2} = L\mathrm{D}i_{L_1} + L\mathrm{D}i_{L_2} \Rightarrow u_C = 0 \Rightarrow i_C = C\mathrm{D}u_C = 0$$

устаљен одзив $i_{L_1} = \mathrm{const}, i_{L_2} = \mathrm{const} \Rightarrow u_{L_1} = 0, u_{L_2} = 0$

$$i_{L_1}\left(0^-\right) = U/R$$

$$i_{L_2}\left(0^-\right) = 0$$

$$u_C\left(0^-\right) = 0$$

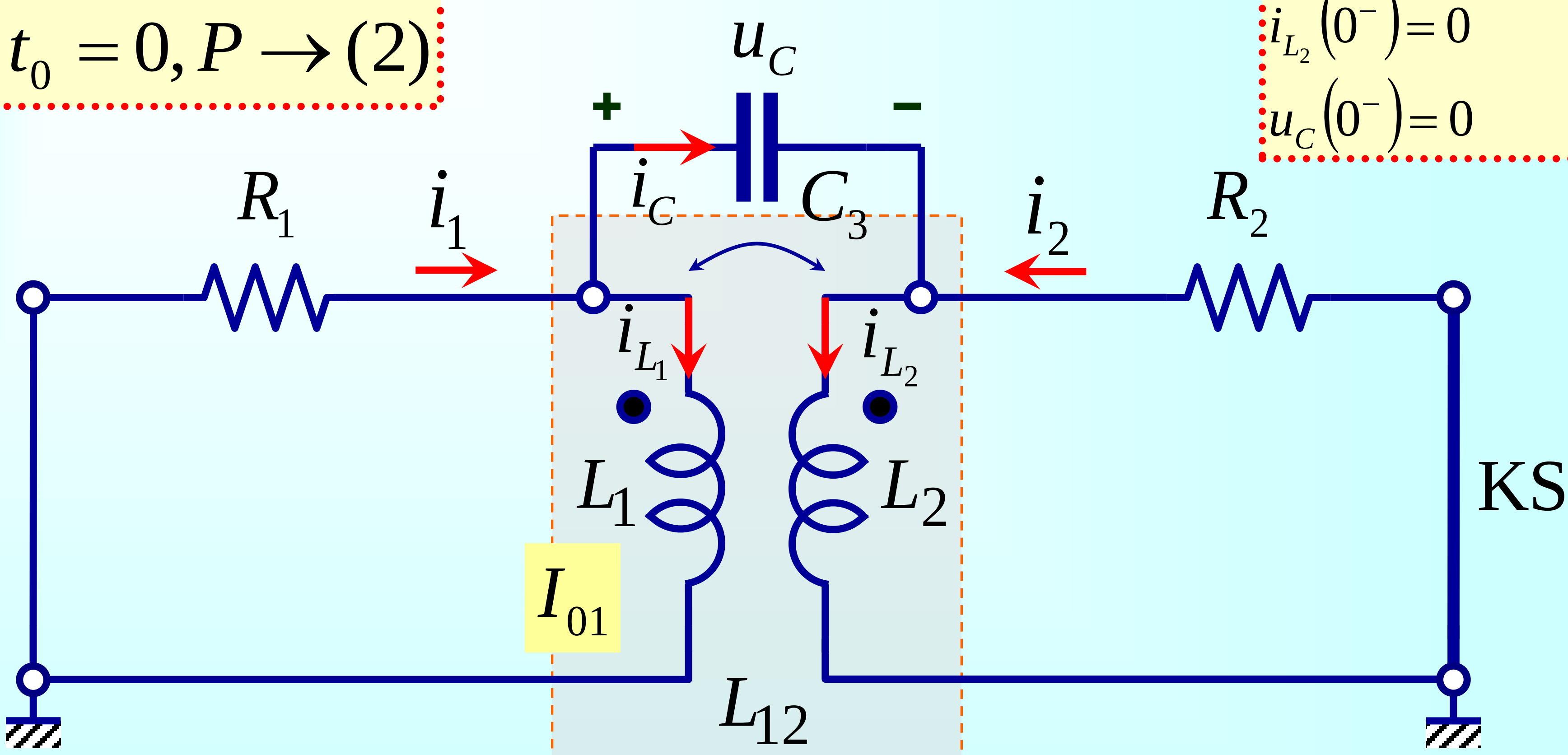
Коло са почетним условом

$$t > t_0 = 0, P \to (2)$$

$$i_{L_1}\left(0^-\right) = \frac{U}{R} = I_{01}$$

$$i_{L_2}\left(0^-\right) = 0$$

$$u_C\left(0^-\right) = 0$$

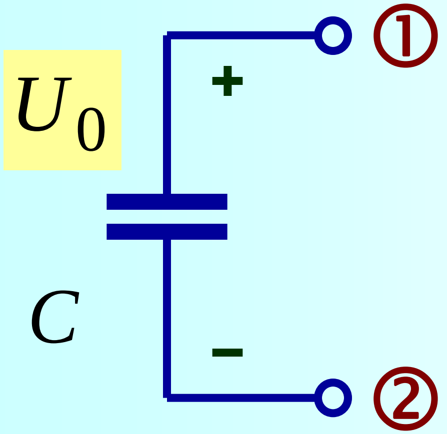


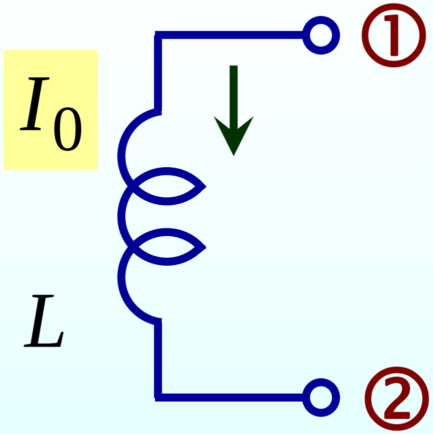
линеарни индуктивни трансформатор
симетричан са савршеном спрегом

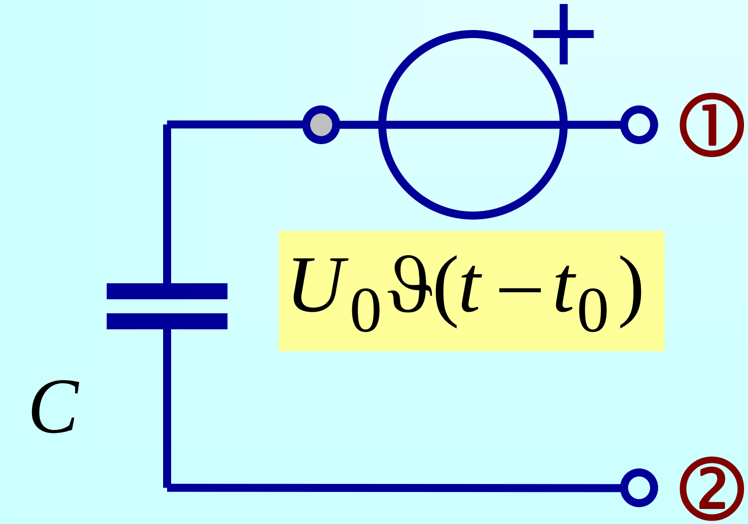
$$u_{L_1} = u_{L_2} = L\mathrm{D}i_{L_1} + L\mathrm{D}i_{L_2} \Rightarrow u_C = 0 \Rightarrow i_C = C\mathrm{D}u_C = 0$$

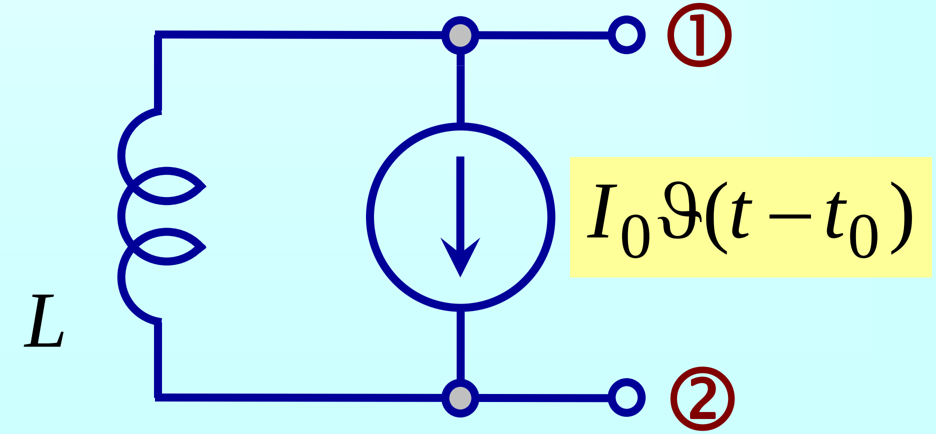
Заменски извори почетних услова

$t > t_0$



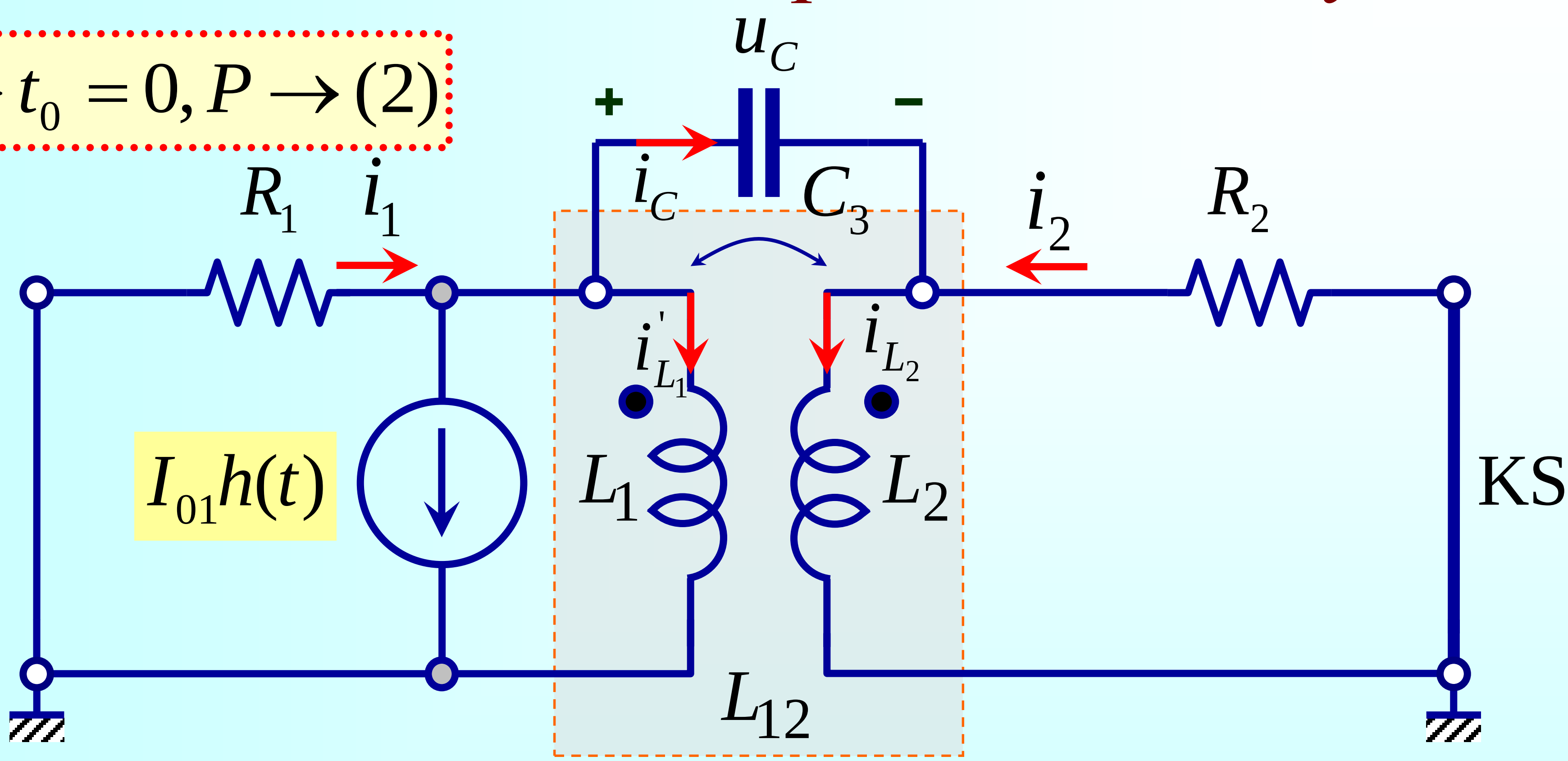






Коло са заменским извором почетних услова

$t > t_0 = 0, P \rightarrow (2)$



$$u_{L_1} = u_{L_2}$$
$$u_C = 0$$
$$i_C = 0$$
$$u_{L_1} = L\mathrm{D}i_{L_1}^{'} + L\mathrm{D}i_{L_2}$$

$$-i_1 + I_{01}h(t) + i_{L_1}^{'} + i_C = 0 \Rightarrow \frac{u_{L_1}}{R_1} + I_{01}h(t) + i_{L_1}^{'} = 0$$

$$-i_2 + i_{L_2} - i_C = 0 \Rightarrow \frac{u_{L_2}}{R_2} + i_{L_2} = 0$$

Једначина одзива

$$\boxed{t > t_0 = 0, P \to (2)}$$

$$\frac{u_{L_2}}{R} + i_{L_2} = 0 \Rightarrow \boxed{i_{L_2} = -\frac{\overbrace{u_{L_2}}^{u_{L_1}}}{R}}$$

$$u_{L_1} = L\mathrm{D}i_{L_1}^{'} + L\mathrm{D}i_{L_2}$$

$$\frac{u_{L_1}}{R} + I_{01}h(t) + i_{L_1}^{'} = 0 \Rightarrow -i_{L_2} + I_{01}h(t) + i_{L_1}^{'} = 0 \Rightarrow \boxed{i_{L_1}^{'} = i_{L_2} - I_{01}h(t)}$$

$$\frac{\overbrace{u_{L_2}}^{L\mathrm{D}i_{L_1}^{'} + L\mathrm{D}i_{L_2}}}{R} + i_{L_2} = 0 \Rightarrow \frac{L\mathrm{D}\overbrace{i_{L_1}^{'}}^{i_{L_2} - I_{01}h(t)} + L\mathrm{D}i_{L_2}}{R} + i_{L_2} = 0$$

$$\frac{2L\mathrm{D}i_{L_2}}{R} + i_{L_2} = I_{01}\frac{L}{R}\overbrace{\mathrm{D}h(t)}^{\delta(t)} \Rightarrow \boxed{\mathrm{D}i_{L_2} + \frac{R}{2L}i_{L_2} = \frac{I_{01}}{2}\delta(t)}$$

Сређивање једначине одзива

$$\boxed{\mathrm{D}i_{L_2}+\frac{R}{2L}i_{L_2}=\frac{I_{01}}{2}\delta(t)}$$

$$i_{L_2}(t)=z(t)h(t)+H_1\delta(t)$$

$$\mathrm{D}i_{L_2}(t)=\mathrm{D}z(t)h(t)+z(t)\mathrm{D}h(t)+H_1\mathrm{D}\delta(t)$$

$$\mathrm{D}i_{L_2}(t)=\mathrm{D}z(t)h(t)+z(0^+)\delta(t)+H_1\mathrm{D}\delta(t)$$

$$\mathrm{D}z(t)h(t)+z(0^+)\delta(t)+H_1\mathrm{D}\delta(t)+\frac{R}{2L}\left(z(t)h(t)+H_1\delta(t)\right)=\frac{I_{01}}{2}\delta(t)$$

$$\boxed{\mathrm{D}z(t)+\frac{R}{2L}z(t)=0}\qquad \boxed{z(0^+)+H_1\frac{R}{2L}=\frac{I_{01}}{2}}\qquad \boxed{H_1=0}$$

Струја краткоспојника KS

$$i_{L_2}(t)=z(t)h(t)+H_1\delta(t)$$

$$\boxed{H_1=0} \Rightarrow \boxed{z(0^+)+H_1\frac{R}{2L}=\frac{I_{01}}{2}\Rightarrow z(0^+)=\frac{I_{01}}{2}}$$

$$\boxed{\mathrm{D}z(t)+\frac{R}{2L}z(t)=0} \Rightarrow A(\underline{s})=\underline{s}+\frac{R}{2L}=0\Rightarrow \underline{s}_1=-\frac{R}{2L} \Rightarrow z(t)=K_1\mathrm{e}^{-\frac{R}{2L}t}$$

$$\boxed{z(t)=\frac{I_{01}}{2}\mathrm{e}^{-\frac{R}{2L}t}} \Rightarrow \boxed{i_{L_2}(t)=i_2(t)=\frac{I_{01}}{2}\mathrm{e}^{-\frac{R}{2L}t}h(t)}$$

Задатак (12)

Задатак 1

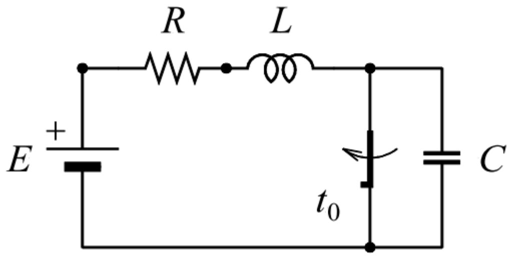
Вредности елемената електричног кола су познате. Прекидач је затворен и одзив је устаљен. У тренутку t_0 прекидач се отвара.

(5) Одредити природне почетне услове у тренутку t_0^-.

(5) Одредити тренутну вредност напона кондензатора, за $t \geq t_0$, ако је $L = CR^2$.

(5) Колика је сакупљена (акумулисана) енергија калема када $t \to +\infty$?

Разматрати општи случај $t_0 \neq 0$.



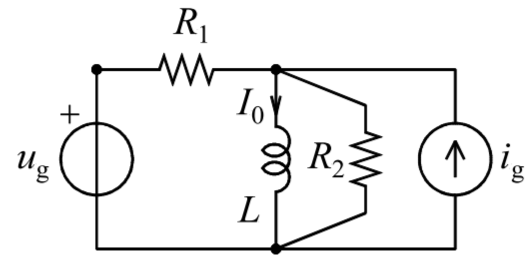
Задатак 2

Вредности елемената електричног кола су познате. $R_1 = R_2 = 2R$, $u_g(t) = U_m \,\mathrm{h}(t)$, $i_g(t) = I_m \exp(-tR/L)\,\mathrm{h}(t)$, $t_0 = 0$.

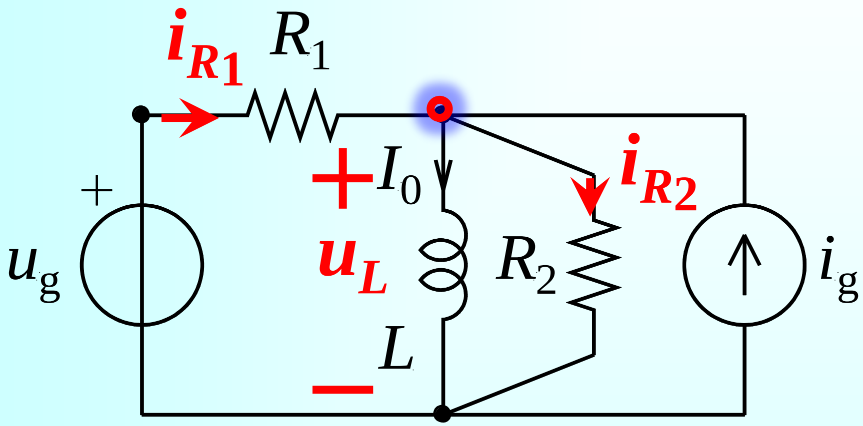
(5) Одредити струју калема за $t > t_0$.

(5) Који је ред кола?

(5) Колики је напон отпорника R_1 када $t \to \infty$?



Одредити струју калема



$R_1 = R_2 = 2R$

$u_g(t) = U_m\,\vartheta(t)$

$i_g(t) = I_m \exp(-tR/L)\,\vartheta(t)$

$t_0 = 0$

$u_L = L\mathrm{D}i_L$

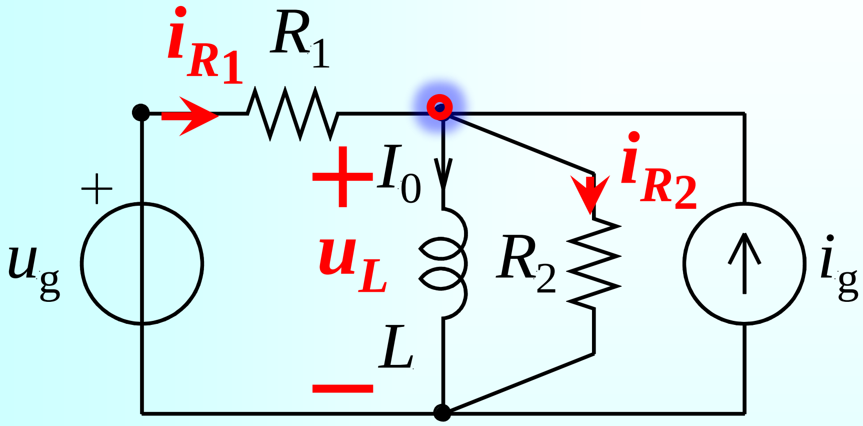
$$-\frac{u_g - u_L}{R_1} + i_L + \frac{u_L}{R_2} - i_g = 0$$

$$-u_g + u_L + 2Ri_L + u_L - 2Ri_g = 0$$

$$-u_g + 2L\mathrm{D}i_L + 2Ri_L - 2Ri_g = 0$$

$$\boxed{\mathrm{D}i_L + \frac{R}{L}i_L = \frac{R}{L}i_g + \frac{1}{2L}u_g}$$

Одзив на почетне услове



$$\boxed{\mathrm{D}i_L + \frac{R}{L}i_L = \frac{R}{L}i_g + \frac{1}{2L}u_g}$$

$i_g \to \mathrm{OFF}$

$u_g \to \mathrm{OFF}$

$i_L(0^-) = I_0$

$$\boxed{\mathrm{D}i_L + \frac{R}{L}i_L = 0}$$

$R_1 = R_2 = 2R$

$u_g(t) = U_m\,\vartheta(t)$

$i_g(t) = I_m \exp(-tR/L)\,\vartheta(t)$

$t_0 = 0$

$$A(\underline{s}) = \underline{s} + \frac{R}{L} = 0 \Rightarrow \underline{s}_1 = -\frac{R}{L}$$

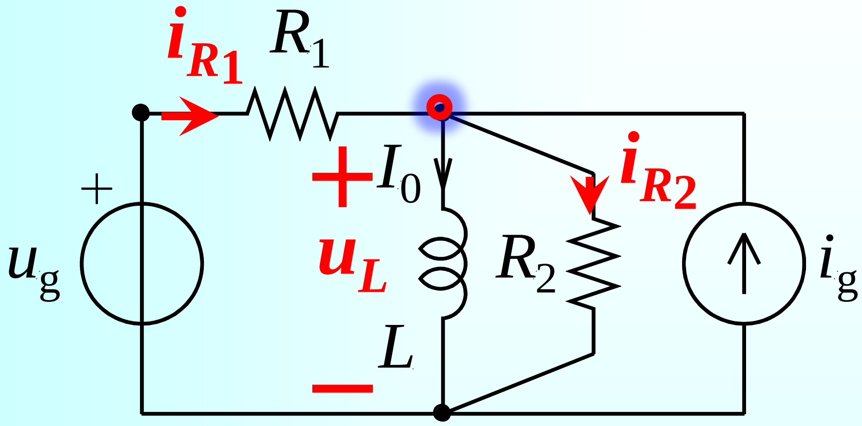
$$i_{L0}(t) = K_1 \mathrm{e}^{-\frac{R}{L}t}, \quad t \geq 0$$

$$i_{L0}(0^-) = i_{L0}(0^+) = I_0$$

$$i_{L0}(0^+) = I_0 = K_1$$

$$\boxed{i_{L0}(t) = I_0 \mathrm{e}^{-\frac{R}{L}t}, \quad t \geq 0}$$

Одзив на напонски генератор



$$R_1 = R_2 = 2R$$

$$u_\mathrm{g}(t) = U_\mathrm{m}\, h(t)$$

$$i_\mathrm{g}(t) = I_\mathrm{m} \exp(-tR/L)\,\vartheta(t)$$

$$t_0 = 0$$

$$\boxed{\mathrm{D}i_L + \frac{R}{L} i_L = \frac{R}{L} i_\mathrm{g} + \frac{1}{2L} u_\mathrm{g}}$$

$i_\mathrm{g} \to \mathrm{OFF}$

$i_L\left(0^-\right) = 0$

$$\boxed{\mathrm{D}i_L + \frac{R}{L} i_L = \frac{1}{2L} u_\mathrm{g}}$$

$$\mathrm{D}i_L + \frac{R}{L} i_L = \frac{1}{2L} U_\mathrm{m}\, h(t)$$

$$i_{Lu_\mathrm{g}}(t) = z(t)h(t)$$

$$\mathrm{D}i_{Lu_\mathrm{g}}(t) = \mathrm{D}z(t)h(t) + \overbrace{z(t)\mathrm{D}h(t)}^{z\left(0^+\right)\delta(t)}$$

$$\mathrm{D}z(t)h(t) + z\left(0^+\right)\delta(t) + \frac{R}{L} z(t)h(t) = \frac{1}{2L} U_\mathrm{m}\, h(t)$$

Одзив на напонски генератор

$$\boxed{\mathrm{D}i_L+\frac{R}{L}i_L=\frac{R}{L}i_{\mathrm{g}}+\frac{1}{2L}u_{\mathrm{g}}}$$

$$i_{\mathrm{g}}\to\mathrm{OFF}$$

$$i_L\left(0^-\right)=0$$

$$\Rightarrow\quad\boxed{\mathrm{D}i_L+\frac{R}{L}i_L=\frac{1}{2L}u_{\mathrm{g}}}$$

$$i_{Lu_{\mathrm{g}}}\left(t\right)=z\left(t\right)h\left(t\right)$$

$$\mathrm{D}z\left(t\right)h\left(t\right)+z\left(0^+\right)\delta\left(t\right)+\frac{R}{L}z\left(t\right)h\left(t\right)=\frac{1}{2L}U_{\mathrm{m}}h\left(t\right)$$

$$\boxed{z(0^+)=0}\quad\boxed{\mathrm{D}z(t)+\frac{R}{L}z(t)=\frac{U_{\mathrm{m}}}{2L}}\quad\Rightarrow\quad z\left(t\right)=z_{\mathrm{h}}\left(t\right)+z_{\mathrm{p}}\left(t\right)$$

$$A\left(\underline{s}\right)=\underline{s}+\frac{R}{L}=0\Rightarrow\underline{s}_1=-\frac{R}{L}$$

$$z_{\mathrm{h}}\left(t\right)=K_2\mathrm{e}^{-\frac{R}{L}t}$$

$$z_{\mathrm{p}}\left(t\right)=K_3\Rightarrow 0+\frac{R}{L}K_3=\frac{U_{\mathrm{m}}}{2L}\Rightarrow K_3=\frac{U_{\mathrm{m}}}{2R}$$

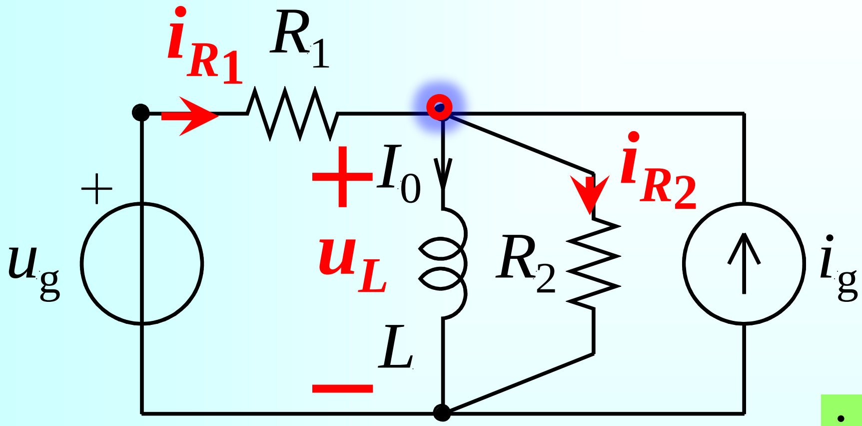
$$\Rightarrow\quad z\left(t\right)=K_2\mathrm{e}^{-\frac{R}{L}t}+\frac{U_{\mathrm{m}}}{2R}$$

$$z(0^+)=0\Rightarrow K_2+\frac{U_{\mathrm{m}}}{2R}=0\Rightarrow K_2=-\frac{U_{\mathrm{m}}}{2R}$$

$$z\left(t\right)=\frac{U_{\mathrm{m}}}{2R}\left(1-\mathrm{e}^{-\frac{R}{L}t}\right)$$

$$\boxed{i_{Lu_{\mathrm{g}}}\left(t\right)=z\left(t\right)h\left(t\right)}$$

Одзив на струјни генератор



$$\mathrm{D}i_L + \frac{R}{L} i_L = \frac{R}{L} i_g + \frac{1}{2L} u_g$$

$$u_g \to \mathrm{OFF}$$

$$i_L(0^-) = 0$$

$$\mathrm{D}i_L + \frac{R}{L} i_L = \frac{R}{L} i_g$$

$$R_1 = R_2 = 2R$$

$$u_g(t) = U_m\, h(t)$$

$$i_g(t) = I_m \exp(-tR/L)\, h(t)$$

$$t_0 = 0$$

$$i_{Li_g}(t) = z_1(t)h(t)$$

$$\mathrm{D}i_{Li_g}(t) = \mathrm{D}z_1(t)h(t) + \overbrace{z_1(t)\mathrm{D}h(t)}^{z_1(0^+)\delta(t)}$$

$$\mathrm{D}z_1(t)h(t) + z_1(0^+)\delta(t) + \frac{R}{L} z_1(t)h(t) = \frac{R}{L} I_m \exp(-tR/L)\, h(t)$$

Одзив на струјни генератор

$$\boxed{\mathrm{D}i_L+\frac{R}{L}i_L=\frac{R}{L}i_{\mathrm{g}}+\frac{1}{2L}u_{\mathrm{g}}}$$

$$u_{\mathrm{g}}\to\mathrm{OFF}$$

$$i_L\left(0^-\right)=0$$

$$\Rightarrow\quad\boxed{\mathrm{D}i_L+\frac{R}{L}i_L=\frac{R}{L}i_{\mathrm{g}}}$$

$$i_{Li_{\mathrm{g}}}(t)=z_1(t)h(t)$$

$$\mathrm{D}z_1(t)h(t)+z_1\left(0^+\right)\delta(t)+\frac{R}{L}z_1(t)h(t)=\frac{R}{L}I_{\mathrm{m}}\exp(-tR/L)h(t)$$

$$\boxed{z_1(0^+)=0}\qquad\boxed{\mathrm{D}z_1(t)+\frac{R}{L}z_1(t)=\frac{R}{L}I_{\mathrm{m}}\exp(-tR/L)}\quad\Rightarrow\quad z_1(t)=z_{1\mathrm{h}}(t)+z_{1\mathrm{p}}(t)$$

$$A(\underline{s})=\underline{s}+\frac{R}{L}=0\Rightarrow\underline{s}_1=-\frac{R}{L}$$

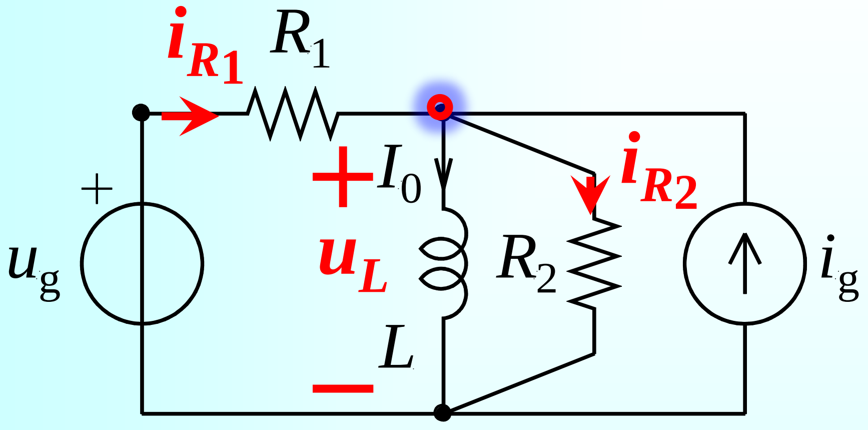
$$z_{1\mathrm{h}}(t)=K_4\mathrm{e}^{-\frac{R}{L}t}\quad\Rightarrow\quad z_1(t)=K_4\mathrm{e}^{-\frac{R}{L}t}+I_{\mathrm{m}}\frac{R}{L}t\,\mathrm{e}^{-\frac{R}{L}t}$$

$$z_{1\mathrm{p}}(t)=K_5\,t\,\mathrm{e}^{-\frac{R}{L}t}\Rightarrow K_5\,\mathrm{e}^{-\frac{R}{L}t}-\cancel{K_5\,t\frac{R}{L}\mathrm{e}^{-\frac{R}{L}t}}+\cancel{\frac{R}{L}K_5\,t\,\mathrm{e}^{-\frac{R}{L}t}}=\frac{R}{L}I_{\mathrm{m}}\mathrm{e}^{-\frac{R}{L}t}\Rightarrow K_5=\frac{R}{L}I_{\mathrm{m}}$$

$$z_1(0^+)=0\Rightarrow K_4=0\quad\Rightarrow\quad z_1(t)=I_{\mathrm{m}}\frac{R}{L}t\,\mathrm{e}^{-\frac{R}{L}t}$$

$$\boxed{i_{Li_{\mathrm{g}}}(t)=z_1(t)h(t)}$$

Потпун одзив



$$\mathrm{D}i_L + \frac{R}{L} i_L = \frac{R}{L} i_g + \frac{1}{2L} u_g$$

$$R_1 = R_2 = 2R$$

$$u_g(t) = U_m\, h(t)$$

$$i_g(t) = I_m \exp(-tR/L)\,\vartheta(t)$$

$$t_0 = 0$$

$$i_{L0}(t) = I_0 e^{-\frac{R}{L}t}, \quad t \geq 0$$

$$i_{Lu_g}(t) = \frac{U_m}{2R}\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right) h(t)$$

$$i_{Li_g}(t) = I_m \frac{R}{L} t\, e^{-\frac{R}{L}t} h(t)$$

$$i_L(t) = i_{L0}(t) + i_{Lu_g}(t) + i_{Li_g}(t) = I_0 e^{-\frac{R}{L}t} + \frac{U_m}{2R}\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right) h(t) + I_m \frac{R}{L} t\, e^{-\frac{R}{L}t} h(t), \quad t \geq 0$$

Задатак (3)

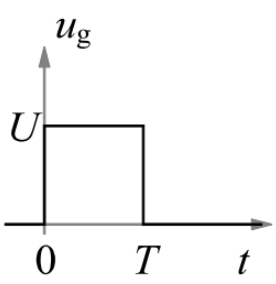
Задатак 1

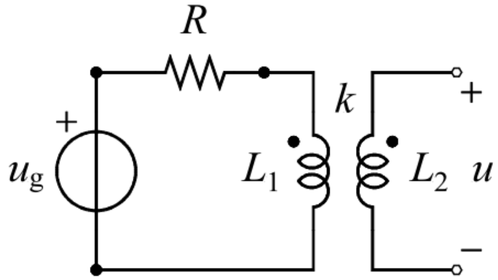
Вредности елемената електричног кола са слике су познате.

(5) Одредити једначину одзива за напон $u(t)$.

(5) Одредити напон $u(t)$ ако је $L_1 = L$, $L_2 = 4L$, $k = \frac{1}{2}$, ако је побуда описана графиком са слике и ако постоји веза $L = RT$.

(5) Нацртати график одређеног напона.





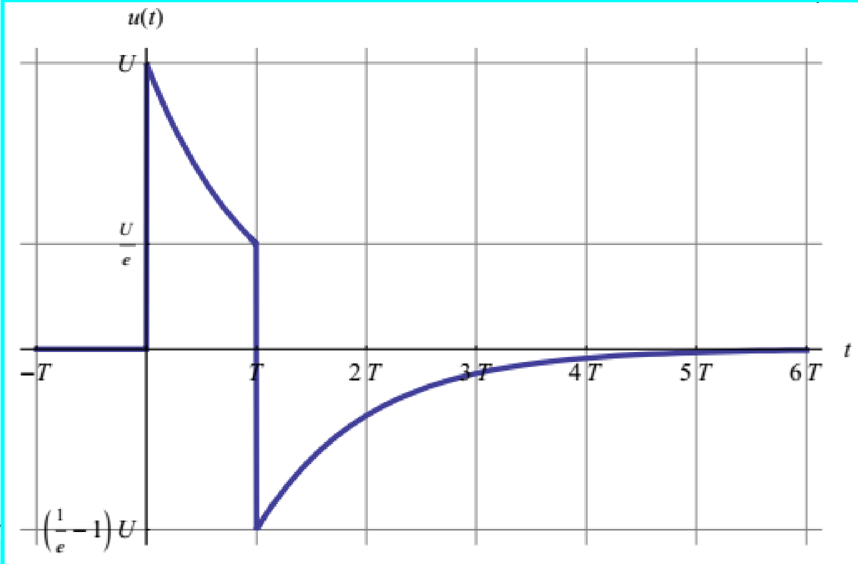
Једначина одзива за напон $u(t)$ је

$$\frac{R\,u(t)}{L_1} + u'(t) = \frac{L_{12}\left(u_g\right)'(t)}{L_1}$$

Напон $u(t)$ је

$$u(t) = U\,\theta(t)\,e^{-\frac{t}{T}} - U\,e^{-\frac{t-T}{T}}\,\theta(t-T)$$

График напона $u(t)$ је



Задатак (5)

Задатак 1

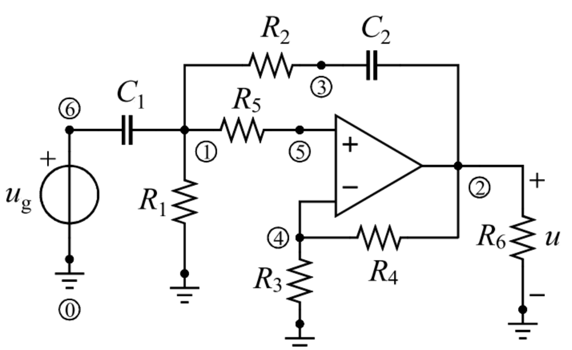
Вредности елемената електричног кола са слике су познате. $R_1 = R$, $R_2 = R$, $R_3 = R$, $R_4 = 2R$, $C_1 = C_2 = C$, $u_g(t) = U\,\vartheta(t)$.

$\vartheta(t)$ је јединична одскочна функција (Хевисајдова функција) која се обележава и са $\mathrm{h}(t)$.

(а) Одредити једначине стања у матричном облику и ред кола.

(б) Одредити напон u за $t > t_0$.

(в) Нацртати график напона u у функцији времена за $t > t_0$.



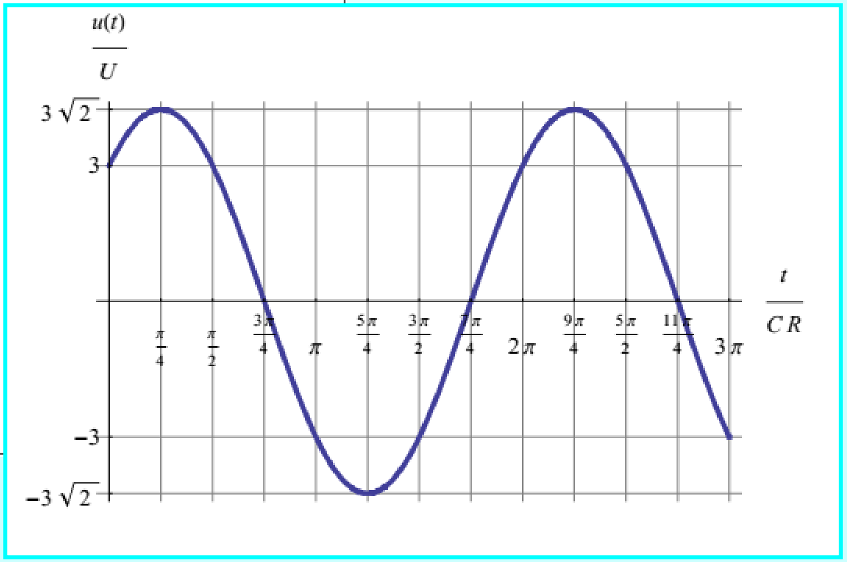
Једначине стања и ред кола су

$$\begin{pmatrix} (u_{C1})'(t) \\ (u_{C2})'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{CR} & \dfrac{1}{CR} \\ -\dfrac{2}{CR} & -\dfrac{1}{CR} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{C1} \\ u_{C2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \dfrac{u_g}{CR} \\ -\dfrac{2u_g}{CR} \end{pmatrix}$$

Напон је

$$u(t) = 3\,U\left(\sin\left(\frac{t}{CR}\right) + \cos\left(\frac{t}{CR}\right)\right) = 3\sqrt{2}\,U \sin\left(\frac{t}{CR} + \frac{\pi}{4}\right),\ t > 0$$

График напона је



Задатак (6)

Задатак 1

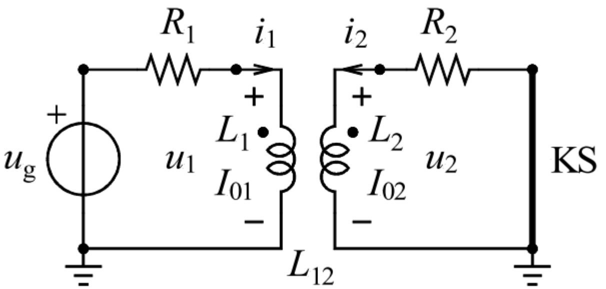
Вредности елемената електричног кола са слике су познате. $R_1 = R$, $R_2 = R$, $L_1 = L$, $L_2 = L$, $k = \dfrac{1}{2}$. Побуда је $u_g(t) = \Phi\,\delta(t)$.

Почетне струје калемова су $i_1(t_0^-) = I_{01}$, $i_2(t_0^-) = I_{02}$, $t_0 = 0$.

(5) Одредити ред кола.

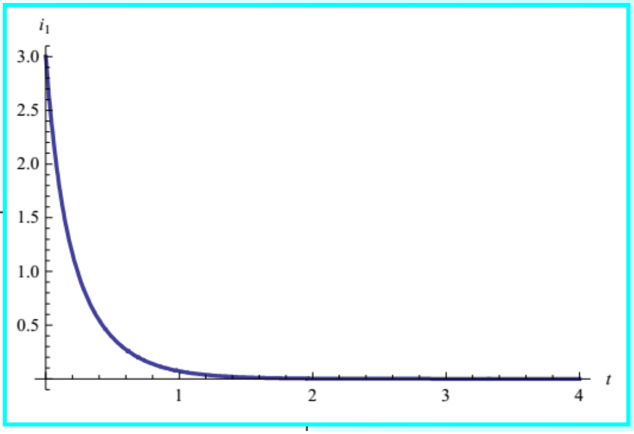
(5) Одредити струју примара i_1 и нацртати њен график у функцији времена.

(5) Одредити струју секундара i_2 и нацртати њен график у функцији времена.



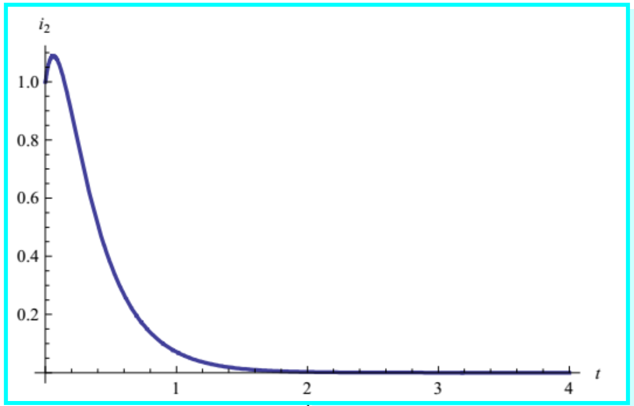
Ред кола је **2**

Струја примара је



$$i_1(t) = e^{-\frac{2Rt}{L}}\left(\frac{I_{01}}{2} - \frac{I_{02}}{2} + \frac{\Phi}{L}\right) + e^{-\frac{2Rt}{3L}}\left(\frac{I_{01}}{2} + \frac{I_{02}}{2} + \frac{\Phi}{3L}\right), \quad t > 0$$

Струја секундара је



$$i_2(t) = \frac{e^{-\frac{2Rt}{L}}\left(-3\,L\,I_{01} + 3\,L\,I_{02} - 6\,\Phi\right)}{6\,L} + \frac{e^{-\frac{2Rt}{3L}}\left(3\,L\,I_{01} + 3\,L\,I_{02} + 2\,\Phi\right)}{6\,L}, \quad t > 0$$