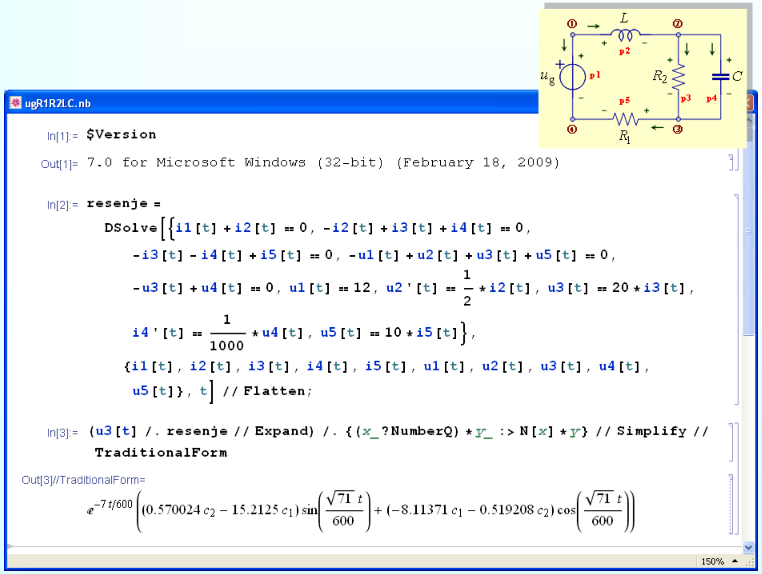
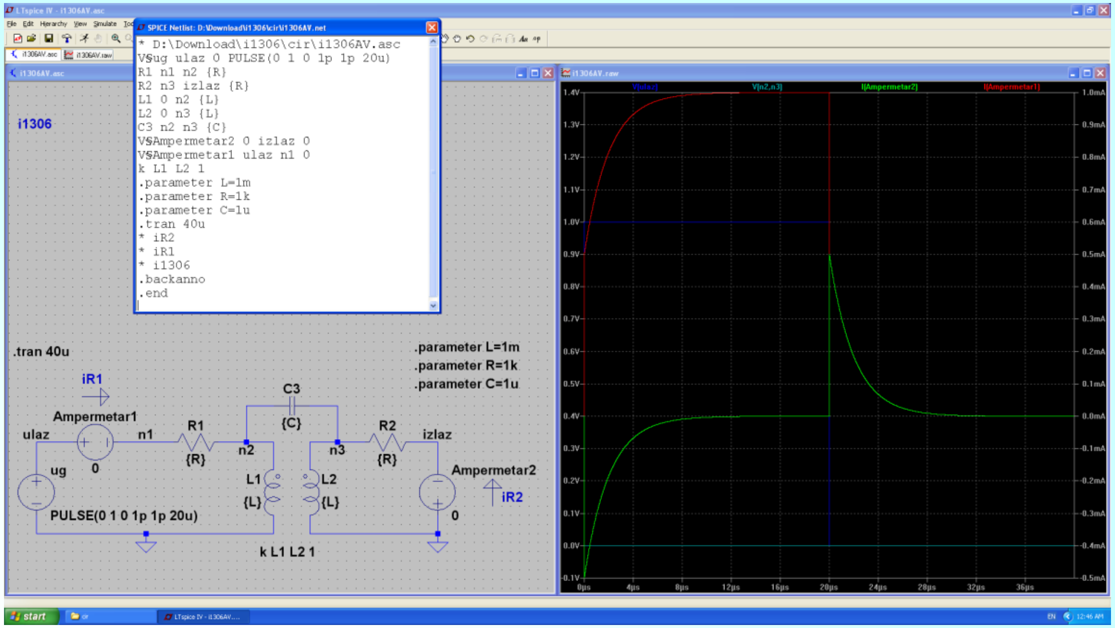
Теорија електричних кола



Милка Потребић



Решавање у временском домену

Једначине стања и једначина одзива

(Transient Analysis)

Једначине стања

- ***Једначине стања*** су једначине кола по струјама калемова и напонима кондензатора, и побудама, написане у договореном облику (*Кошијева нормална форма*)
- Са **леве** стране једнакости је **први извод** струје калема или напона кондензатора
- Са **десне** стране једнакости су **алгебарски** чланови струја калемова, напона кондензатора и **побуда** (струја и напона извора)

Једначина одзива

- ***Одзив*** је напон или струја у колу настао услед енергије динамичких елемената, или побуде, или и једног и другог
- ***Једначина одзива*** је у општем случају диференцијална једначина по траженом одзиву, коју изводимо из једначина кола, а која је написана у договореном облику

Питања

(6) Конволуциони интеграл: мотив, извођење и примена.

Погледати предавање!

(5) Конволуционим интегралом се одређује	(а) потпун одзив (комплетан одзив), (б) одзив на почетне услове, (в) $\boxed{\text{одзив на побуду (екситацију),}}$ (г) устаљен одзив ?

(5) Одскочни одзив (индициона функција) је $f(t)=\cos\left(t/\sqrt{CL}\right)\vartheta(t)$. Колики је одговарајући импулсни одзив (Гринова функција)? $\vartheta(t)$ је јединична одскочна функција (Хевисајдова функција) која се обележава и са $\mathrm{h}(t)$.

$$g(t)=\frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t}=-\frac{1}{\sqrt{LC}}\sin\left(\frac{t}{\sqrt{LC}}\right)h(t)+\delta(t)$$

Задатак (2)

√

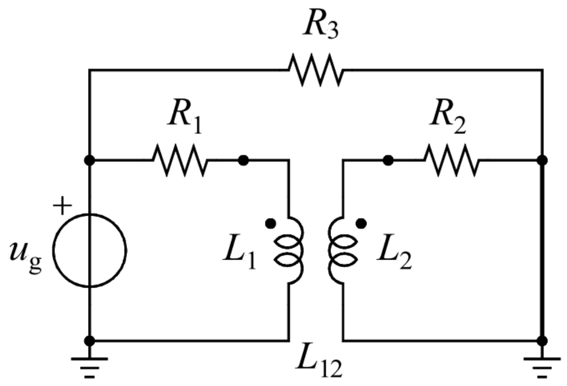
Задатак 2

(5) Колико ф-пресека има граф кола са слике?

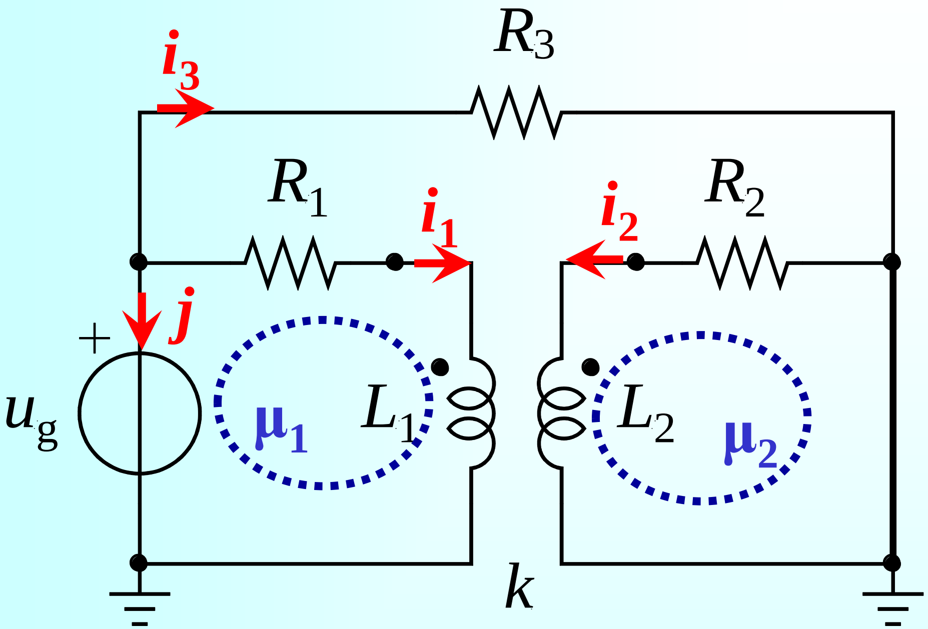
(5) Одредити једначине стања у матричном облику ако је $R_1 = R$, $R_2 = R$, $R_3 = R$,

$$L_1 = L\,,\; L_2 = 2L\,,\; k = \frac{1}{\sqrt{2}}\,.$$

(5) У који облик прелазе једначине стања ако је трансформатор симетричан са савршеном спрегом?



Једначине стања



1) **2)**

$$u_g = R_1 i_1 + L_1 Di_1 + L_{12} Di_2 \qquad \cdot L_{12},\ \cdot L_2$$

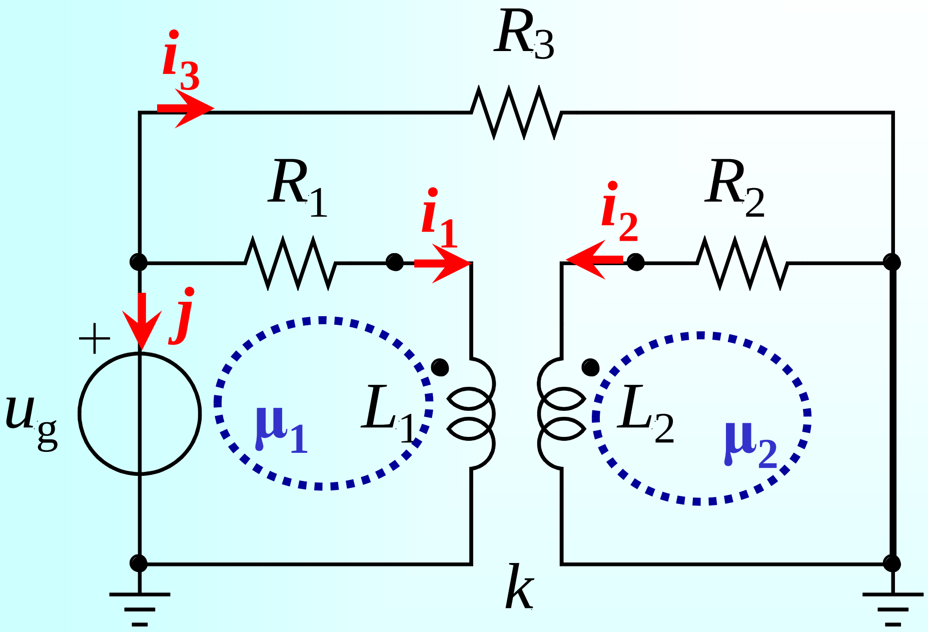
$$0 = R_2 i_2 + L_{12} Di_1 + L_2 Di_2 \qquad \cdot L_1,\ \cdot L_{12}$$

1)
$$\left.\begin{aligned} u_g L_{12} &= L_{12} R_1 i_1 + L_{12} L_1 \mathrm{D} i_1 + L_{12}^2 \mathrm{D} i_2 \\ 0 &= L_1 R_2 i_2 + L_1 L_{12} \mathrm{D} i_1 + L_1 L_2 \mathrm{D} i_2 \end{aligned}\right\} - \Rightarrow u_g L_{12} = L_{12} R_1 i_1 - R_2 L_1 i_2 + \left(L_{12}^2 - L_1 L_2\right) \mathrm{D} i_2$$

$$\boxed{\mathrm{D} i_2 = -\frac{L_{12} R_1}{L_{12}^2 - L_1 L_2} i_1 + \frac{R_2 L_1}{L_{12}^2 - L_1 L_2} i_2 + \frac{L_{12}}{L_{12}^2 - L_1 L_2} u_g}$$

$$\mathrm{D} i_2 = \frac{R}{L} i_1 - \frac{R}{L} i_2 - \frac{1}{L} u_g$$

Једначине стања



1) 2)

$$u_g = R_1 i_1 + L_1 D i_1 + L_{12} D i_2 \quad \cdot L_{12},\ \cdot L_2$$

$$0 = R_2 i_2 + L_{12} D i_1 + L_2 D i_2 \quad \cdot L_1,\ \cdot L_{12}$$

2)
$$\left.\begin{aligned} u_g L_2 &= L_2 R_1 i_1 + L_2 L_1 \mathrm{D} i_1 + L_2 L_{12} \mathrm{D} i_2 \\ 0 &= L_{12} R_2 i_2 + L_{12}^2 \mathrm{D} i_1 + L_{12} L_2 \mathrm{D} i_2 \end{aligned}\right\} - \Rightarrow u_g L_2 = L_2 R_1 i_1 - R_2 L_{12} i_2 - \left(L_{12}^2 - L_1 L_2\right) \mathrm{D} i_1$$

$$\boxed{\mathrm{D} i_1 = \frac{L_2 R_1}{L_{12}^2 - L_1 L_2} i_1 - \frac{R_2 L_{12}}{L_{12}^2 - L_1 L_2} i_2 - \frac{L_2}{L_{12}^2 - L_1 L_2} u_g}$$

$$\mathrm{D} i_1 = -\frac{2R}{L} i_1 + \frac{R}{L} i_2 + \frac{2}{L} u_g$$

Једначине стања у матричном облику

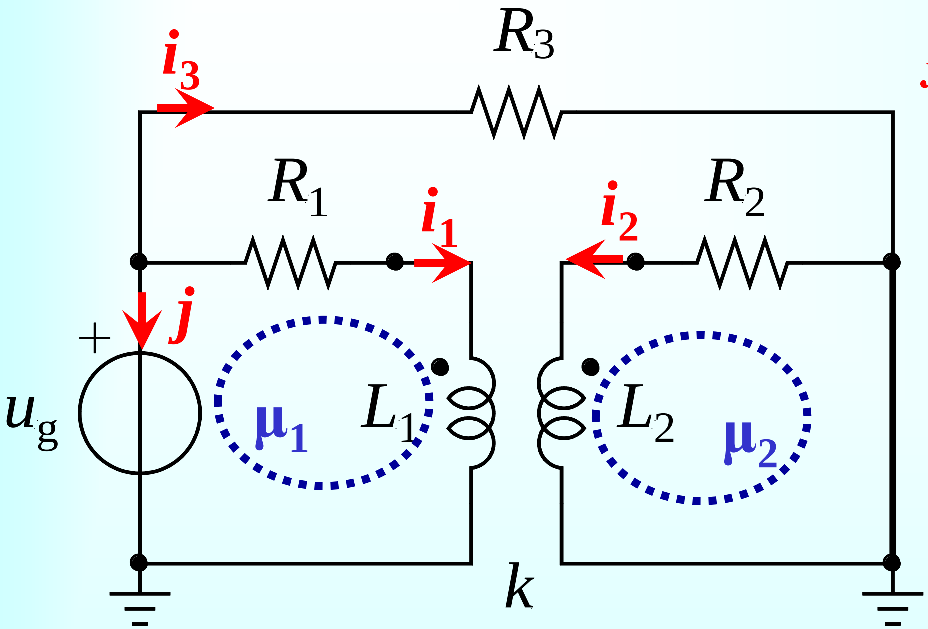
$$\mathrm{D}i_1 = -\frac{2R}{L}i_1 + \frac{R}{L}i_2 + \frac{2}{L}u_\mathrm{g}$$

$$\mathrm{D}i_2 = \frac{R}{L}i_1 - \frac{R}{L}i_2 - \frac{1}{L}u_\mathrm{g}$$

$$\boxed{\mathrm{D}\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dfrac{2R}{L} & \dfrac{R}{L} \\ \dfrac{R}{L} & -\dfrac{R}{L} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dfrac{2}{L} \\ -\dfrac{1}{L} \end{bmatrix}u_\mathrm{g}}$$

Једначине стања

$L_1 = L_2 = L_{12} = L$!!!



линеарни индуктивни трансформатор симетричан са савршеном спрегом

$$u_g = R_1 i_1 + L_1 D i_1 + L_{12} D i_2$$
$$0 = R_2 i_2 + L_{12} D i_1 + L_2 D i_2$$

$$\left.\begin{aligned} u_g &= R i_1 + L\mathrm{D} i_1 + L\mathrm{D} i_2 \\ 0 &= R i_2 + L\mathrm{D} i_1 + L\mathrm{D} i_2 \end{aligned}\right\} - \Rightarrow u_g = R(i_1 - i_2) \Rightarrow i_2 = i_1 - \frac{u_g}{R}$$

$$u_g = R i_1 + L\mathrm{D} i_1 + L\mathrm{D}\left(i_1 - \frac{u_g}{R}\right) \Rightarrow u_g = R i_1 + 2L\mathrm{D} i_1 - \frac{L}{R}\mathrm{D} u_g$$

$$\boxed{\mathrm{D} i_1 = -\frac{R}{2L} i_1 + \frac{1}{2L} u_g + \frac{1}{2R}\mathrm{D} u_g}$$

$$\boxed{i_2 = i_1 - \frac{u_g}{R}}$$

Задатак (1)

√

Задатак 1

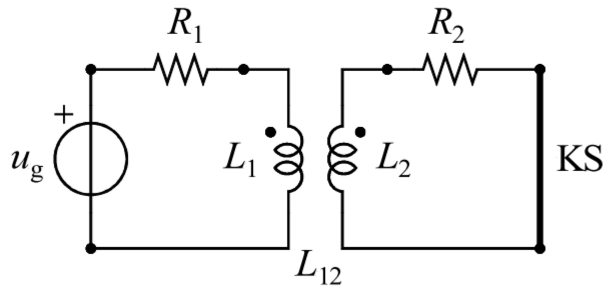
Електрично коло са слике има познате вредности елемената: $R_1 = R_2 = R$, $L_1 = L$. Трансформатор је симетричан са савршеном спрегом. Побуда је $u_g(t) = U\,\mathrm{e}^{-at}\,\mathrm{h}(t)$,

$$a = \frac{R}{2L}.$$

(5) Одредити струју краткоспојника KS.

(5) Одредити ред кола.

(5) Нацртати граф кола.



Задатак 1

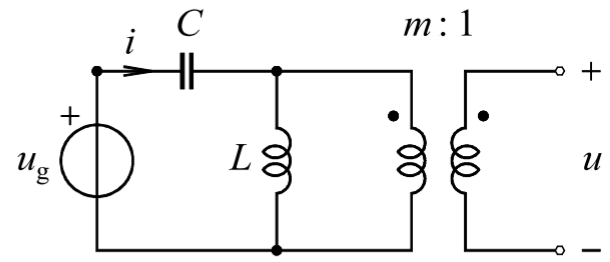
(5) Одредити једначину одзива за напон u електричног кола са слике. Вредности елемената и параметри побуде су познати,

$$u_g(t) = U_m \sin\left(\frac{1}{\sqrt{CL}}t\right)\mathrm{h}(t).$$

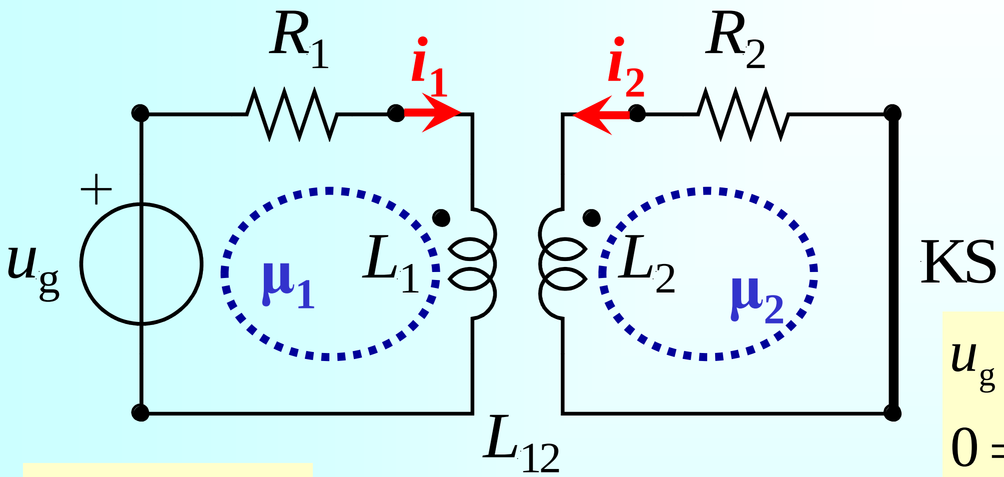
Нема сакупљене енергије.

(5) Одредити струју извора, i, и нацртати график струје извора.

(5) Како гласе једначине стања кола? Написати их у матричном облику.



Одредити струју краткоспојника KS



$$u_g = R_1 i_1 + L_1 D i_1 + L_{12} D i_2$$
$$0 = R_2 i_2 + L_{12} D i_1 + L_2 D i_2$$

$R_1 = R_2 = R$

$L_1 = L$

линеарни индуктивни трансформатор симетричан са савршеном спрегом

$$\left.\begin{aligned} u_g &= R i_1 + L \mathrm{D} i_1 + L \mathrm{D} i_2 \\ 0 &= R i_2 + L \mathrm{D} i_1 + L \mathrm{D} i_2 \end{aligned}\right\} - \Rightarrow \boxed{i_1 = i_2 + \frac{u_g}{R}}$$

$$u_g = R\left(i_2 + \frac{u_g}{R}\right) + L\mathrm{D}\left(i_2 + \frac{u_g}{R}\right) + L\mathrm{D} i_2$$

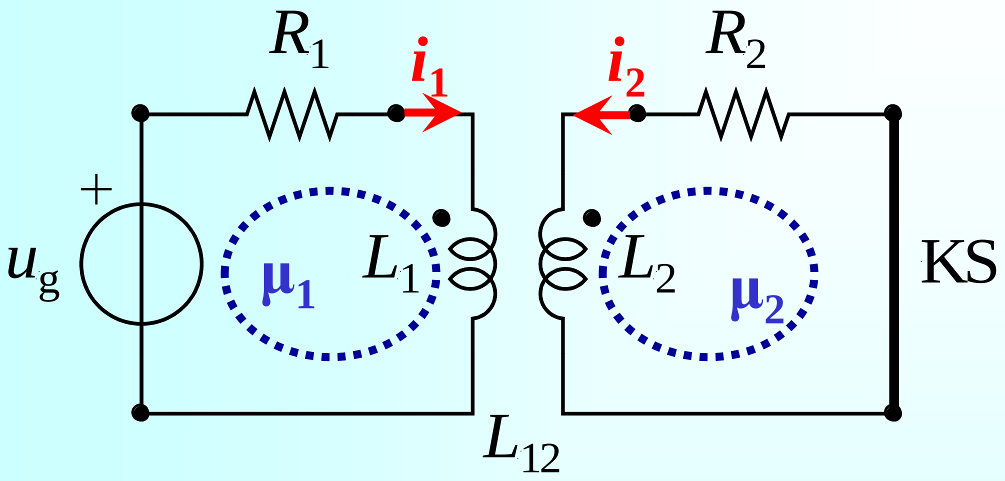
$$\cancel{u_g} = R i_2 + 2L\mathrm{D} i_2 + \frac{L}{R}\mathrm{D} u_g + \cancel{u_g}$$

$u_g(t) = U\,\mathrm{e}^{-at}\,h(t)$

$$\boxed{\mathrm{D} i_2 + \frac{R}{2L} i_2 = -\frac{1}{2R}\mathrm{D} u_g}$$

$a = \dfrac{R}{2L}$

Једначина одзива



$$\boxed{\mathrm{D}i_2+\frac{R}{2L}i_2=-\frac{1}{2R}\mathrm{D}u_\mathrm{g}}$$

$$u_\mathrm{g}(t)=U\,\mathrm{e}^{-at}\,h(t)$$

$$a=\frac{R}{2L}$$

$$\mathrm{D}i_2+\frac{R}{2L}i_2=-\frac{1}{2R}\mathrm{D}\left(U\mathrm{e}^{-at}h(t)\right)$$

$$\mathrm{D}i_2+\frac{R}{2L}i_2=-\frac{U}{2R}\left(-a\mathrm{e}^{-at}h(t)+\mathrm{e}^{-at}\mathrm{D}h(t)\right)$$

$$\mathrm{D}i_2+\frac{R}{2L}i_2=-\frac{U}{2R}\left(-a\mathrm{e}^{-at}h(t)+\mathrm{e}^{-at}\delta(t)\right)$$

Сређивање једначине одзива

$$\boxed{\mathrm{D}i_2+\frac{R}{2L}i_2=-\frac{1}{2R}\mathrm{D}u_\mathrm{g}}\qquad u_\mathrm{g}(t)=U\,\mathrm{e}^{-at}\,h(t)\qquad \boxed{a=\frac{R}{2L}}$$

$$\mathrm{D}i_2+\frac{R}{2L}i_2=-\frac{U}{2R}\left(-\frac{R}{2L}\mathrm{e}^{-\frac{R}{2L}t}h(t)+\underbrace{\mathrm{e}^{-\frac{R}{2L}t}}_{1}\delta(t)\right)$$

$$\mathrm{D}i_2+\frac{R}{2L}i_2=\frac{U}{4L}\mathrm{e}^{-\frac{R}{2L}t}h(t)-\frac{U}{2R}\delta(t)$$

$$i_2(t)=z(t)h(t)+H_1\delta(t)+H_2\mathrm{D}\delta(t)$$

$$\mathrm{D}i_2(t)=\mathrm{D}z(t)h(t)+z(t)\mathrm{D}h(t)+H_1\mathrm{D}\delta(t)+H_2\mathrm{D}^2\delta(t)$$

$$\mathrm{D}i_2(t)=\mathrm{D}z(t)h(t)+z(t)\delta(t)+H_1\mathrm{D}\delta(t)+H_2\mathrm{D}^2\delta(t)$$

$$\mathrm{D}i_2(t)=\mathrm{D}z(t)h(t)+z(0^+)\delta(t)+H_1\mathrm{D}\delta(t)+H_2\mathrm{D}^2\delta(t)$$

Одзив на побуду

$$\mathrm{D}i_2+\frac{R}{2L}i_2=\frac{U}{4L}\mathrm{e}^{-\frac{R}{2L}t}h(t)-\frac{U}{2R}\delta(t)$$

$$i_2(t)=z(t)h(t)+H_1\delta(t)+H_2\mathrm{D}\delta(t)$$

$$\mathrm{D}i_2(t)=\mathrm{D}z(t)h(t)+z(0^+)\delta(t)+H_1\mathrm{D}\delta(t)+H_2\mathrm{D}^2\delta(t)$$

$$\boxed{H_1+\frac{R}{2L}H_2=0}$$

$$\boxed{H_2=0}$$

$$\mathrm{D}z(t)h(t)+z(0^+)\delta(t)+H_1\mathrm{D}\delta(t)+H_2\mathrm{D}^2\delta(t)+\frac{R}{2L}\left(z(t)\cdot h(t)+H_1\cdot\delta(t)+H_2\mathrm{D}\delta(t)\right)=\frac{U}{4L}\mathrm{e}^{-\frac{R}{2L}t}h(t)-\frac{U}{2R}\delta(t)$$

$$\boxed{\mathrm{D}z(t)+\frac{R}{2L}z(t)=\frac{U}{4L}\mathrm{e}^{-\frac{R}{2L}t}}$$

$$\boxed{z(0^+)+H_1\frac{R}{2L}=-\frac{U}{2R}}$$

Одзив на побуду

$$i_2(t) = z(t)h(t) + H_1\delta(t) + H_2\mathrm{D}\delta(t)$$

$$\boxed{H_2 = 0} \Rightarrow \boxed{H_1 + \frac{R}{2L}H_2 = 0 \Rightarrow H_1 = 0} \Rightarrow \boxed{z(0^+) + H_1\frac{R}{2L} = -\frac{U}{2R} \Rightarrow z(0^+) = -\frac{U}{2R}}$$

$$\boxed{\mathrm{D}z(t) + \frac{R}{2L}z(t) = \frac{U}{4L}\mathrm{e}^{-\frac{R}{2L}t}} \Rightarrow z(t) = z_\mathrm{h}(t) + z_\mathrm{p}(t)$$

$$z_\mathrm{p}(t) = K_1 t\,\mathrm{e}^{-\frac{R}{2L}t} \Rightarrow K_1\mathrm{e}^{-\frac{R}{2L}t} - K_1 t\frac{R}{2L}\mathrm{e}^{-\frac{R}{2L}t} + \frac{R}{2L}K_1 t\,\mathrm{e}^{-\frac{R}{2L}t} = \frac{U}{4L}\mathrm{e}^{-\frac{R}{2L}t}$$

$$K_1 - K_1 t\frac{R}{2L} + \frac{R}{2L}K_1 t = \frac{U}{4L} \Rightarrow K_1 = \frac{U}{4L} \Rightarrow z_\mathrm{p}(t) = \frac{U}{4L}t\,\mathrm{e}^{-\frac{R}{2L}t}$$

$$A(\underline{s}) = \underline{s} + \frac{R}{2L} = 0 \Rightarrow \underline{s}_1 = -\frac{R}{2L} \Rightarrow z_\mathrm{h}(t) = K_2\mathrm{e}^{-\frac{R}{2L}t}$$

$$\boxed{z(t) = K_2\mathrm{e}^{-\frac{R}{2L}t} + \frac{U}{4L}t\,\mathrm{e}^{-\frac{R}{2L}t}}$$

Струја краткоспојника KS

$$i_2(t) = z(t)h(t) + H_1\delta(t) + H_2 \mathrm{D}\delta(t)$$

$$\boxed{H_1 = 0} \qquad \boxed{H_2 = 0}$$

$$z(t) = K_2 \mathrm{e}^{-\frac{R}{2L}t} + \frac{U}{4L} t\, \mathrm{e}^{-\frac{R}{2L}t}$$

$$\boxed{z(0^+) = -\frac{U}{2R}}$$

$$\Downarrow$$

$$z(0^+) = -\frac{U}{2R} = K_2 \mathrm{e}^{-\frac{R}{2L}0^+} + \frac{U}{4L} 0^+\, \mathrm{e}^{-\frac{R}{2L}0^+} \Rightarrow K_2 = -\frac{U}{2R}$$

$$i_2(t) = z(t)h(t) = \left(-\frac{U}{2R} \mathrm{e}^{-\frac{R}{2L}t} + \frac{U}{4L} t\, \mathrm{e}^{-\frac{R}{2L}t} \right) h(t) = U \left(\frac{1}{4L} t - \frac{1}{2R} \right) \mathrm{e}^{-\frac{R}{2L}t} h(t)$$

Задатак (8)

Задатак 1

Вредности елемената електричног кола са слике су познате.

$R_1 = R$, $R_2 = R$,

$R_3 = R$, $R_4 = 2R$,

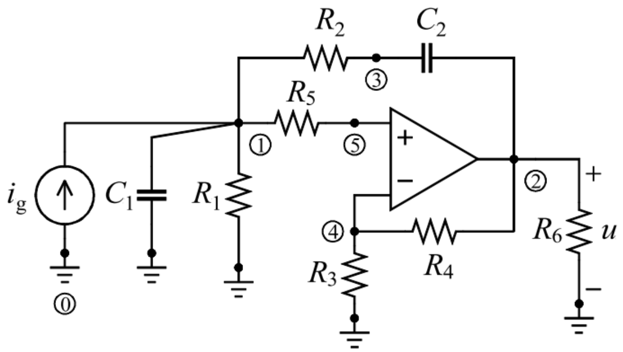
$C_1 = C_2 = C$,

$i_g(t) = Q\delta(t)$.

(5) Одредити једначине стања у матричном облику и ред кола.

(5) Одредити напон u за $t > t_0$.

(5) Нацртати график напона u у функцији времена за $t > t_0$.

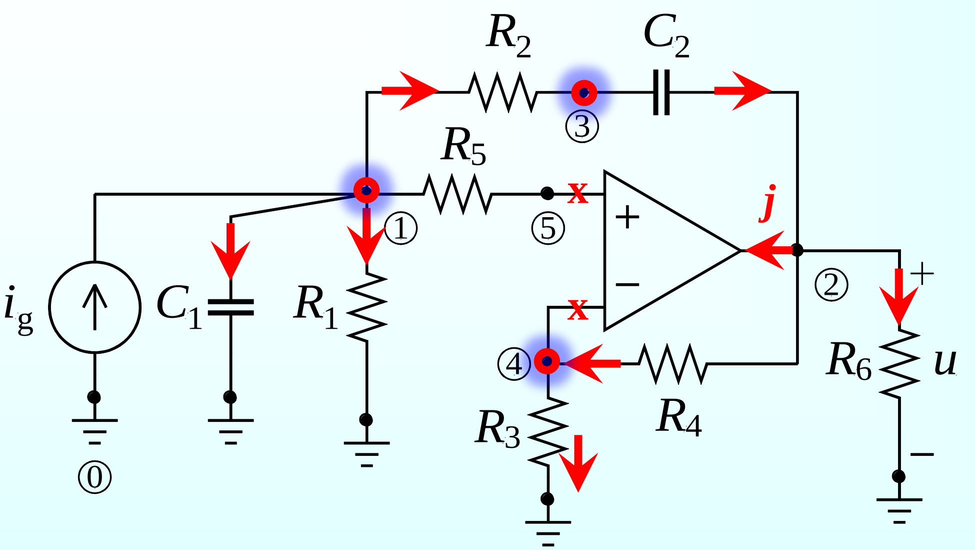


Једначине стања у матричном облику су

Напон u за $t > t_0$ је

График напона u је

Једначине стања



$$(1)\; -i_g + C_1 Du_{C_1} + \frac{\overbrace{v_1}^{u_{C_1}}}{R_1} + \frac{v_1 - \overbrace{v_3}^{u_{C_2}+v_2}}{R_2} = 0$$

$$(3)\; -\frac{v_1 - v_3}{R_2} + C_2 Du_{C_2} = 0$$

$$(4)\; \frac{v_4}{R_3} - \frac{v_2 - v_4}{R_4} = 0$$

$$v_4 = v_5$$

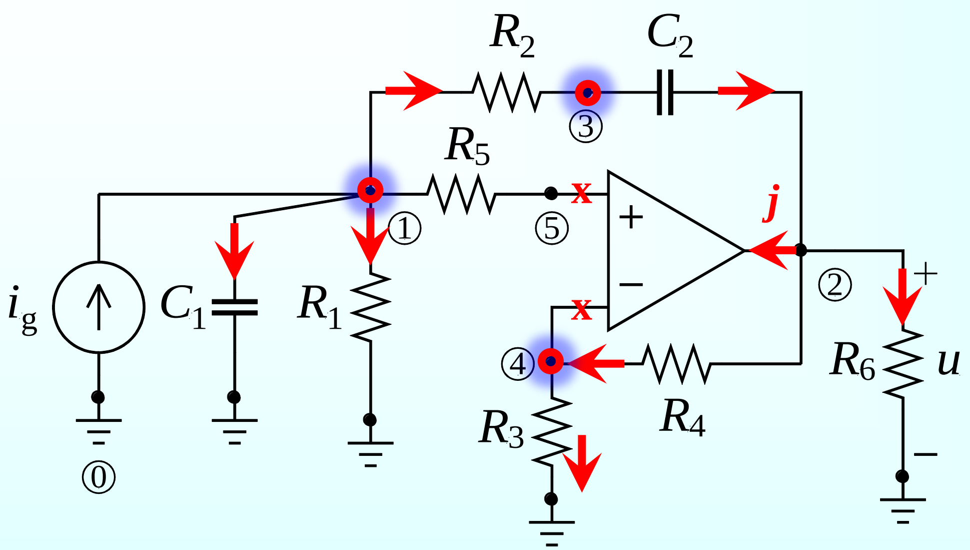
$$v_1 = v_5$$

$$(4)\; \frac{v_4}{R_3} - \frac{v_2 - v_4}{R_4} = 0 \Rightarrow \frac{v_4}{R} - \frac{v_2 - v_4}{2R} = 0 \Rightarrow v_2 = 3v_4 \Rightarrow v_2 = 3v_1 = 3u_{C_1}$$

$$\boxed{Du_{C_1} = \frac{1}{RC}u_{C_1} + \frac{1}{RC}u_{C2} + \frac{1}{C}i_g}$$

$$(1)\; -i_g + C_1 Du_{C_1} + \frac{u_{C_1}}{R_1} + \frac{u_{C_1} - \overbrace{v_3}^{\overbrace{v_2}^{3v_1} + u_{C_2}}}{R_2} = 0 \Rightarrow -i_g + CDu_{C_1} - \frac{u_{C_1}}{R} - \frac{u_{C2}}{R} = 0$$

Једначине стања



$$(1)\; -i_g + C_1 \mathrm{D} u_{C_1} + \frac{\overbrace{v_1}^{u_{C_1}}}{R_1} + \frac{v_1 - \overbrace{v_3}^{u_{C_2}+v_2}}{R_2} = 0$$

$$(3)\; -\frac{v_1 - v_3}{R_2} + C_2 \mathrm{D} u_{C_2} = 0$$

$$(4)\; \frac{v_4}{R_3} - \frac{v_2 - v_4}{R_4} = 0$$

$$v_4 = v_5$$

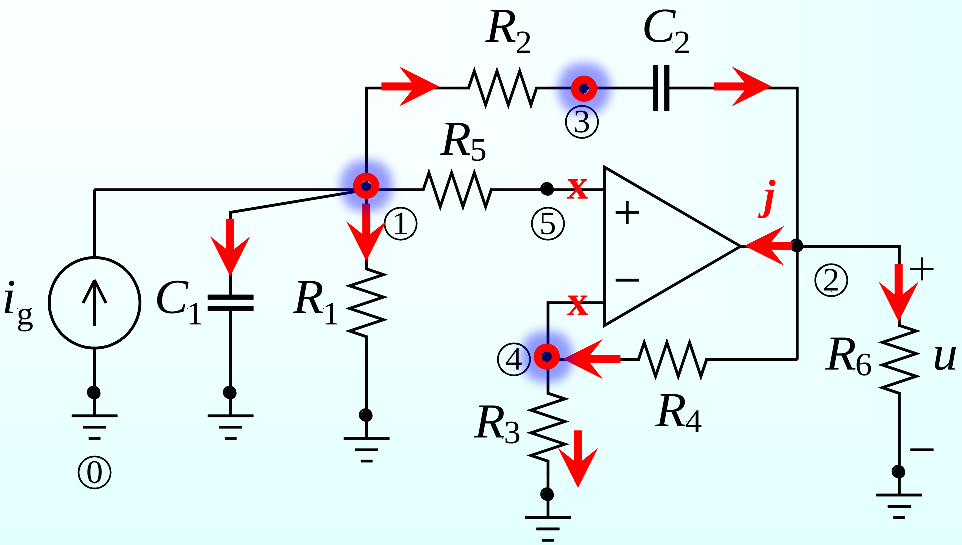
$$v_1 = v_5$$

$$v_2 = 3v_1 = 3u_{C_1}$$

$$(3)\; -\frac{v_1 - v_3}{R_2} + C_2 \mathrm{D} u_{C_2} = 0 \Rightarrow -u_{C_1} + \overbrace{v_3}^{u_{C_2} + \overbrace{v_2}^{3u_{C_1}}} + RC\,\mathrm{D} u_{C_2} = 0$$

$$\boxed{\mathrm{D} u_{C_2} = -\frac{2}{RC} u_{C_1} - \frac{1}{RC} u_{C_2}}$$

Једначине стања у матричном облику

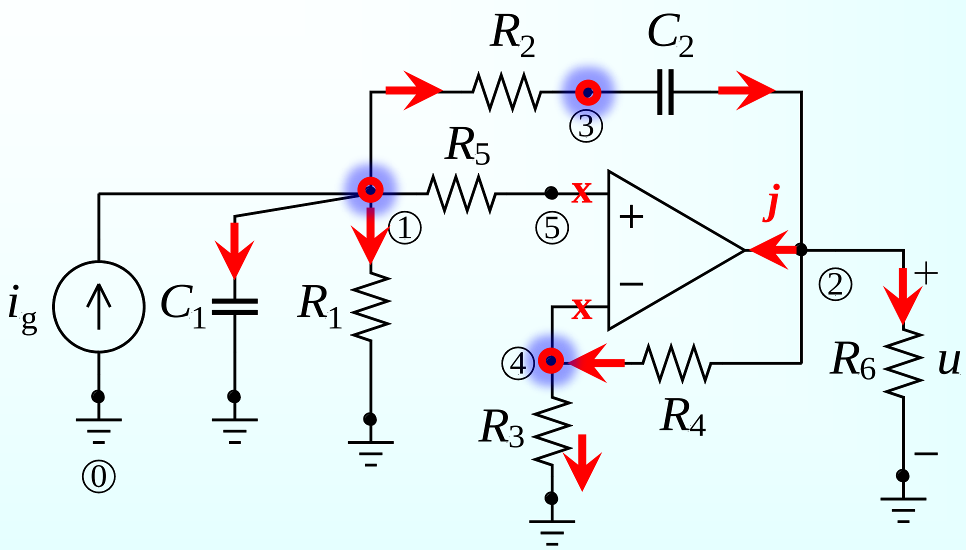


$$\mathrm{D}u_{C_1} = \frac{1}{RC}u_{C_1} + \frac{1}{RC}u_{C2} + \frac{1}{C}i_g$$

$$\mathrm{D}u_{C_2} = -\frac{2}{RC}u_{C_1} - \frac{1}{RC}u_{C_2}$$

$$\boxed{\mathrm{D}\begin{bmatrix} u_{C_1} \\ u_{C2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{RC} & \dfrac{1}{RC} \\ -\dfrac{2}{RC} & -\dfrac{1}{RC} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{C_1} \\ u_{C2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dfrac{1}{C}i_g \\ 0 \end{bmatrix}}$$

Једначина одзива



$$\mathrm{D}u_{C_1} = \frac{1}{RC}u_{C_1} + \frac{1}{RC}u_{C2} + \frac{1}{C}i_g$$

$$\mathrm{D}u_{C_2} = -\frac{2}{RC}u_{C_1} - \frac{1}{RC}u_{C_2}$$

$$\mathrm{D}u_{C_1} = \frac{1}{RC}u_{C_1} + \frac{1}{RC}u_{C2} + \frac{1}{C}i_g \Rightarrow u_{C2} = RC\mathrm{D}u_{C_1} - u_{C_1} - Ri_g$$

$$\mathrm{D}u_{C_2} = -\frac{2}{RC}u_{C_1} - \frac{1}{RC}u_{C_2}$$

$$\Downarrow$$

$$\mathrm{D}\left(RC\mathrm{D}u_{C_1} - u_{C_1} - Ri_g\right) = -\frac{2}{RC}u_{C_1} - \frac{1}{RC}\left(RC\mathrm{D}u_{C_1} - u_{C_1} - Ri_g\right)$$

Једначина одзива

$$\mathrm{D}\left(RC\mathrm{D}u_{C_1}-u_{C_1}-Ri_{\mathrm{g}}\right)=-\frac{2}{RC}u_{C_1}-\frac{1}{RC}\left(RC\mathrm{D}u_{C_1}-u_{C_1}-Ri_{\mathrm{g}}\right)$$

$$RC\mathrm{D}^2u_{C_1}-\cancel{\mathrm{D}u_{C_1}}-R\mathrm{D}i_{\mathrm{g}}=-\frac{2}{RC}u_{C_1}-\cancel{\mathrm{D}u_{C_1}}+\frac{1}{RC}u_{C_1}+\frac{1}{C}i_{\mathrm{g}}$$

$$\mathrm{D}^2u_{C_1}+\frac{1}{(RC)^2}u_{C_1}=\frac{1}{C}\mathrm{D}i_{\mathrm{g}}+\frac{1}{RC^2}i_{\mathrm{g}}$$

$$u=v_2=3u_{C_1}$$

$$\boxed{\mathrm{D}^2u+\frac{1}{(RC)^2}u=\frac{3}{C}\mathrm{D}i_{\mathrm{g}}+\frac{3}{RC^2}i_{\mathrm{g}}}$$

$$i_{\mathrm{g}}(t)=Q\,\delta(t)$$

$$i_{\mathrm{g}}(t)=\delta(t)\Rightarrow u=g(t)=z(t)\cdot h(t)+H_1\delta(t)$$

$$\mathrm{D}g(t)=\mathrm{D}z(t)h(t)+z(t)\mathrm{D}h(t)+H_1\mathrm{D}\delta(t)=\mathrm{D}z(t)h(t)+z(0^+)\delta(t)+H_1\mathrm{D}\delta(t)$$

$$\mathrm{D}^2g(t)=\mathrm{D}^2z(t)h(t)+\mathrm{D}z(t)\mathrm{D}h(t)+z(0^+)\mathrm{D}\delta(t)+H_1\mathrm{D}^2\delta(t)$$

$$\mathrm{D}^2g(t)=\mathrm{D}^2z(t)h(t)+\mathrm{D}z(0^+)\delta(t)+z(0^+)\mathrm{D}\delta(t)+H_1\mathrm{D}^2\delta(t)$$

Сређивање једначине одзива

$$\boxed{\mathrm{D}^2 g(t)+\frac{1}{(RC)^2}g(t)=\frac{3}{C}\mathrm{D}\delta(t)+\frac{3}{RC^2}\delta(t)}$$

$$g(t)=z(t)\cdot h(t)+H_1\delta(t)$$

$$\mathrm{D}^2 g(t)=\mathrm{D}^2 z(t)h(t)+\mathrm{D}z(0^+)\delta(t)+z(0^+)\mathrm{D}\delta(t)+H_1\mathrm{D}^2\delta(t)$$

$$\mathrm{D}^2 z(t)h(t)+\mathrm{D}z(0^+)\delta(t)+z(0^+)\mathrm{D}\delta(t)+H_1\mathrm{D}^2\delta(t)+\frac{1}{(RC)^2}\left(z(t)h(t)+H_1\delta(t)\right)=\frac{3}{C}\mathrm{D}\delta(t)+\frac{3}{RC^2}\delta(t)$$

$$\boxed{\mathrm{D}^2 z(t)+\frac{1}{(RC)^2}z(t)=0}$$

$$\boxed{\mathrm{D}z(0^+)+H_1\frac{1}{(RC)^2}=\frac{3}{RC^2}} \Rightarrow \boxed{\mathrm{D}z(0^+)=\frac{3}{RC^2}}$$

$$\boxed{z(0^+)=\frac{3}{C}}$$

$$\boxed{H_1=0}$$

Одзив: напон *u*

$$g(t) = z(t)\cdot h(t) + H_1\delta(t)$$ $$\boxed{H_1 = 0}$$

$$\boxed{\mathrm{D}^2 z(t) + \frac{1}{(RC)^2} z(t) = 0} \Rightarrow A(\underline{s}) = \underline{s}^2 + \frac{1}{(RC)^2} = 0 \Rightarrow \underline{s}_{1,2} = \pm\frac{\mathrm{j}}{RC} = \pm \mathrm{j}\omega$$

$$z(t) = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)$$

$$\boxed{z(0^+) = \frac{3}{C}} \quad z(0^+) = A\cos(\omega\cdot 0^+) + B\sin(\omega\cdot 0^+) = A = \frac{3}{C} \quad \boxed{A = \frac{3}{C}}$$

$$\boxed{\mathrm{D}z(0^+) = \frac{3}{RC^2}} \quad \mathrm{D}z(0^+) = -A\omega\sin(\omega\cdot t) + B\omega\cos(\omega\cdot t)\Big|_{t=0^+} = B\omega = \frac{3}{RC^2} \quad \boxed{B = \frac{3}{C}}$$

$$g(t) = z(t)\cdot h(t) = \frac{3}{C}(\cos(\omega t) + \sin(\omega t))\cdot h(t)$$

$$i_g(t) = Q\,\delta(t) \Rightarrow \boxed{u = Qg(t) = \frac{3Q}{C}\left(\cos\left(\frac{t}{RC}\right) + \sin\left(\frac{t}{RC}\right)\right)\cdot h(t)}$$

Задатак (12)

√

Задатак 1

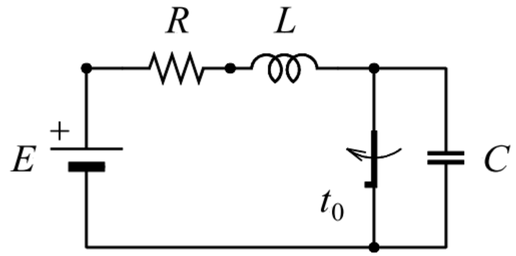
Вредности елемената електричног кола су познате. Прекидач је затворен и одзив је устаљен. У тренутку t_0 прекидач се отвара.

(5) Одредити природне почетне услове у тренутку t_0^-.

(5) Одредити тренутну вредност напона кондензатора, за $t \geq t_0$, ако је $L = CR^2$.

(5) Колика је сакупљена (акумулисана) енергија калема када $t \to +\infty$?

Разматрати општи случај $t_0 \neq 0$.



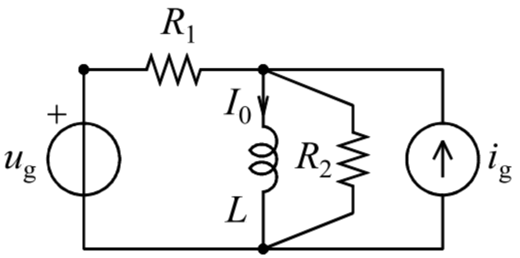
Задатак 2

Вредности елемената електричног кола су познате. $R_1 = R_2 = 2R$, $u_g(t) = U_m\,\mathrm{h}(t)$, $i_g(t) = I_m \exp(-tR/L)\,\mathrm{h}(t)$, $t_0 = 0$.

(5) Одредити струју калема за $t > t_0$.

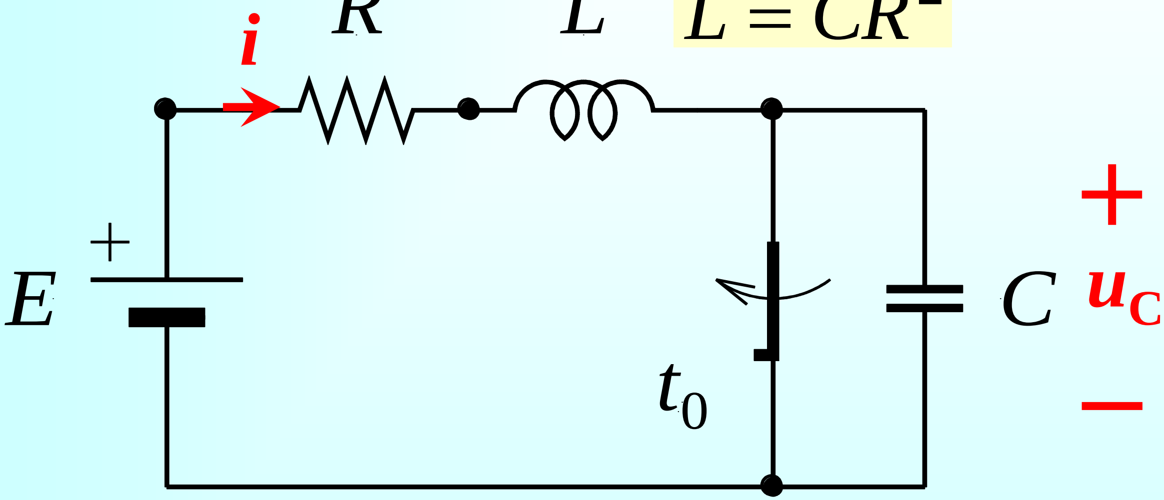
(5) Који је ред кола?

(5) Колики је напон отпорника R_1 када $t \to \infty$?



Природни почетни услови

$t < t_0$



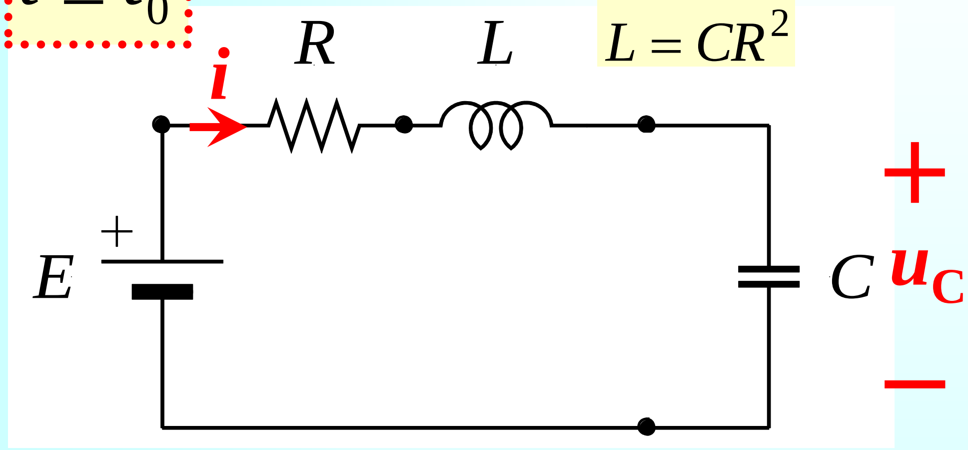
$L = CR^2$

$u_C\left(t_0^-\right) = 0$

$i_L\left(t_0^-\right) = E/R$

Једначина одзива за напон кондензатора

$t \geq t_0$



$$E = Ri + L\mathrm{D}i + u_C$$

$$i = C\mathrm{D}u_C$$

$$E = RC\mathrm{D}u_C + L\mathrm{D}\left(C\mathrm{D}u_C\right) + u_C$$

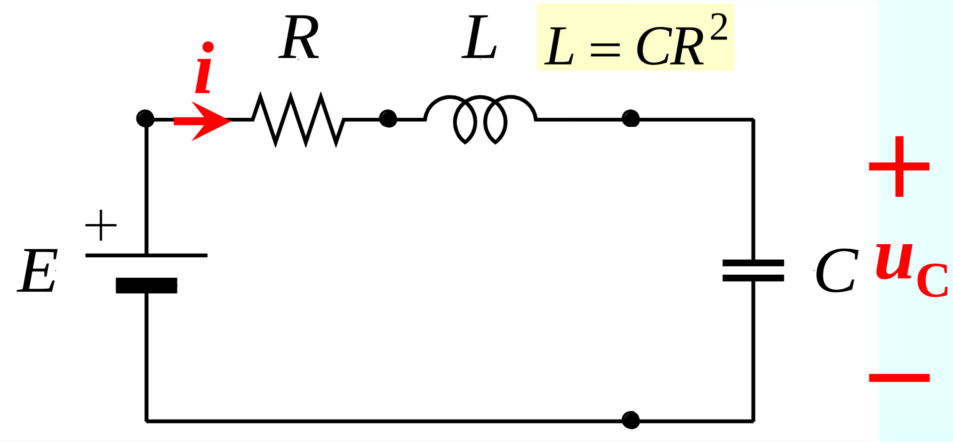
$$\mathrm{D}^2 u_C + \frac{R}{L}\mathrm{D}u_C + \frac{1}{LC}u_C = \frac{E}{LC}$$

$$\boxed{\mathrm{D}^2 u_C + \frac{1}{RC}\mathrm{D}u_C + \frac{1}{(RC)^2}u_C = \frac{E}{(RC)^2}}$$

$$u_C(t) = u_{Ch}(t) + u_{Cp}(t)$$

$t \geq t_0$

Опште решење једначине одзива



$$\mathrm{D}^2 u_\mathrm{C} + \frac{1}{RC}\mathrm{D}u_\mathrm{C} + \frac{1}{(RC)^2}u_\mathrm{C} = \frac{E}{(RC)^2}$$

$$\Downarrow$$

$$u_C(t) = u_{\mathrm{Ch}}(t) + u_{\mathrm{Cp}}(t)$$

$$A(\underline{s}) = \underline{s}^2 + \frac{1}{RC}\underline{s} + \frac{1}{(RC)^2} = 0 \Rightarrow \underline{s}_{1,2} = -\frac{1}{2RC} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{(RC)^2} - 4\frac{1}{(RC)^2}}$$

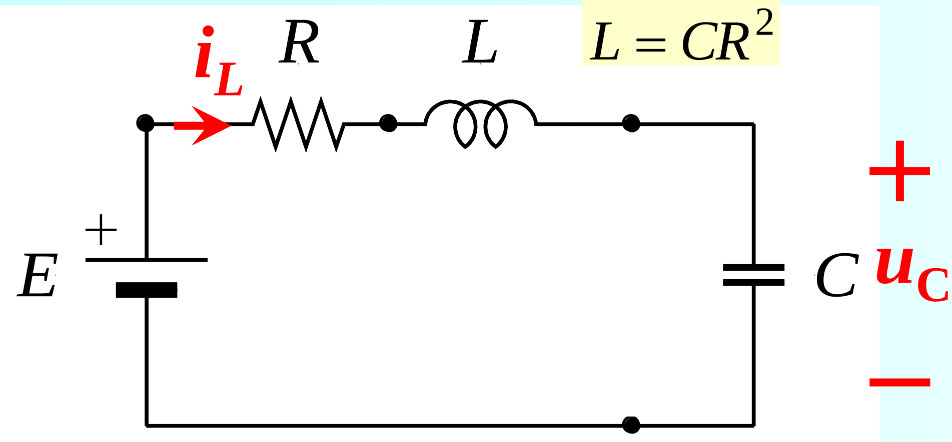
$$\underline{s}_{1,2} = -\frac{1}{2RC}\left(1 \pm \mathrm{j}\sqrt{3}\right) = -\alpha \pm \mathrm{j}\omega$$

$$\Downarrow$$

$$u_{\mathrm{Ch}}(t) = \mathrm{e}^{-\alpha(t-t_0)}\left(A\cos(\omega(t-t_0)) + B\sin(\omega(t-t_0))\right)$$

$t \geq t_0$

Опште решење једначине одзива



$$\mathrm{D}^2 u_\mathrm{C} + \frac{1}{RC}\mathrm{D}u_\mathrm{C} + \frac{1}{(RC)^2}u_\mathrm{C} = \frac{E}{(RC)^2}$$

$$u_C(t) = u_{\mathrm{Ch}}(t) + u_{\mathrm{Cp}}(t)$$

$$u_{\mathrm{Ch}}(t) = \mathrm{e}^{-\alpha(t-t_0)}\left(A\cos(\omega(t-t_0)) + B\sin(\omega(t-t_0))\right)$$

$$u_{\mathrm{Cp}}(t) = K = \mathrm{const} \Rightarrow 0 + 0 + \frac{1}{(RC)^2}K = \frac{E}{(RC)^2} \Rightarrow K = E$$

$$u_C(t) = u_{\mathrm{Ch}}(t) + u_{\mathrm{Cp}}(t) = \mathrm{e}^{-\alpha(t-t_0)}\left(A\cos(\omega(t-t_0)) + B\sin(\omega(t-t_0))\right) + E$$

Тренутна вредност напона кондензатора

$$t \geq t_0$$

$$u_C(t) = u_{Ch}(t) + u_{Cp}(t) = \mathrm{e}^{-\alpha(t-t_0)}\left(A\cos(\omega(t-t_0)) + B\sin(\omega(t-t_0))\right) + E$$

$$u_C(t_0^-) = u_C(t_0^+) = 0 \qquad i_L(t_0^-) = i_L(t_0^+) = E/R \qquad \mathrm{D}u_C(t_0^+) = \frac{i_C(t_0^+)}{C} = \frac{i_L(t_0^+)}{C} = \frac{E}{RC}$$

$$u_C(t_0^+) = 0 \qquad u_C(t_0^+) = A + E = 0 \Rightarrow A = -E$$

$$\mathrm{D}u_C(t_0^+) = \frac{E}{RC} \qquad \mathrm{D}u_C(t_0^+) = \frac{E}{RC} = -\alpha A + B\omega \Rightarrow B = \left(-\alpha E + \frac{E}{RC}\right)\Big/\omega = E/\sqrt{3}$$

$$\mathrm{D}u_C(t_0^+) = -\alpha\,\mathrm{e}^{-\alpha(t-t_0)}\left(A\cos(\omega(t-t_0)) + B\sin(\omega(t-t_0))\right) + \\ + \mathrm{e}^{-\alpha(t-t_0)}\left(-A\omega\sin(\omega(t-t_0)) + B\omega\cos(\omega(t-t_0))\right)\Big|_{t=t_0^+} = -\alpha A + B\omega$$

$$\boxed{u_C(t) = E\mathrm{e}^{-\alpha(t-t_0)}\left(-\cos(\omega(t-t_0)) + \frac{1}{\sqrt{3}}\sin(\omega(t-t_0))\right) + E, \quad t \geq t_0}$$