

Пример решавања резистивног електричног кола. Уопштен поступак напона чворова (MNA, Modified Nodal Analysis, Модификована Нодална Анализа, МНА)

Универзитет у Београду – Електротехнички факултет

Теорија електричних кола

Др Дејан В. Тошић, редовни професор

21. новембар 2019. године

Циљ, покретач (мотив), замисао

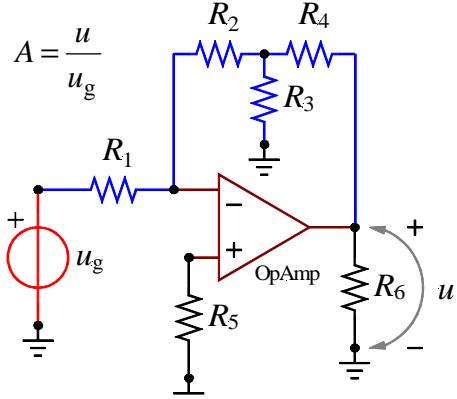
Желимо да решимо електрично коло које се састоји од отпорничких (резистивних) електричних елемената и напонских и струјних извора (идеалних независних напонских и струјних генератора). Решити електрично коло, по правилу, значи одредити напоне и струје приступа, снаге приступа или елемената, и разне функције кола, на пример, појачање или слабење изражено количницима напона и струја. Посматрамо кола састављена од отпорника, зависних извора (контролисаних генератора), идеалних трансформатора, операционих појачавача, и других резистивних елемената. Елемент је резистиван (отпорнички) ако су његове једначине алгебарске, а у њима нема извода и интеграла по времену.

Тражимо опште применљив поступак који је подесан и за ручно решавање, помоћу папира и оловке, као и за машинско аутоматизовано решавање, помоћу рачунара и наменског софтвера.

Усвајамо поступак који се темељи на чворовима и једначинама елемената, без потребе да одређујемо контуре и постављамо једначине Кирхофовог закона за напоне. Чворове електричног кола непосредно уочавамо у задатој шеми, нумеришемо узастопним природним бројевима почев од један, или узастопним целим бројевима почев од нуле ако уочавамо упоредан чвор (референтни чвор, нулти чвор, уземљење, масу, шасију, кућиште, ...).

Алгоритам МНА

Решавање електричног кола уопштеним поступком напона чворова (МНА) може се описати низом корака. Биће изложен кроз пример.

<p>Задатак</p> <p>Инвертујући појачавач великог појачања и малог распона познатих отпорности је приказан на слици. Одредити</p> <p>(8) напонско појачање $A = \frac{u}{u_g}$.</p> <p>(3) Нацртати граф појачавача и</p> <p>(4) одредити број главних (фундаменталних) пресека и петљи (контура).</p>	
---	--

Корак 1

Упоредни чвор обележити нулом. Обележити остале чворове узастопним природним бројевима почев од један.

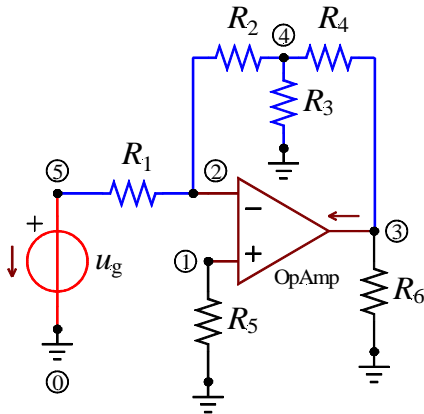
Усвојити смерове струја приступа које се не могу изразити преко једначина елемената и напона чворова.

Напон чвора (потенцијал чвора) је напон између чвора обележеног са 1, 2, 3, ..., и упоредног чвора обележеног са 0.

У примеру постоји шест чворова обележених са 0, 1, 2, 3, 4, 5.

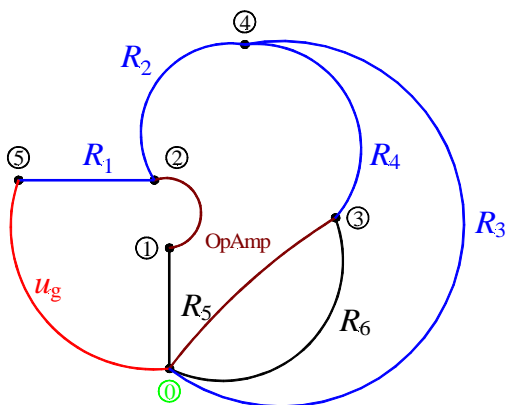
Струја напонског извора се не може изразити преко једначине елемента и напона чворова.

Струја на излазу операционог појачавача се, такође, не може изразити преко једначина елемента и напона чворова.



Корак 2

Испитати да ли је граф електричног кола повезан. Нацртати граф.



Граф овог електричног кола јесте повезан. Можемо наставити са решавањем применом МНА.

Ако граф електричног кола није повезан, онда уочимо неповезане делове (дисконектоване компоненте), у сваком делу уочимо један чвор, и спојимо уочене чворове. Напони и струје приступа се не мењају оваквим преобликовање (трансформацијом, трансфигурацијом) кола.

Корак 3

Напоне (потенцијале) чворова обележити са v_1, v_2, v_3, \dots .

Написати једначине Кирхофовог закона за струје (КЗС) за све чворове осим упоредног (нултог).

Струје приступа, ако је могуће, изразити преко напона (потенцијала) чворова и једначина елемената.

Ако струја приступа елемента не може да се изрази преко напона чворова, онда она остаје као променљива у систему једначина МНА, и додаје се једначина елемента (карактеристика елемента, конститутивна једначина елемента, дефинициона једначина елемента).

Улазна струја операционог појачавача је једнака нули, не уводимо посебан симбол за њу, и ту вредност непосредно укључујемо у једначине КЗС.

Струја напонског извора не може да се изрази преко напона чворова, остаје као променљива у систему једначина МНА, и додаје се једначина напонског извора.

Излазна струја операционог појачавача не може да се изрази преко напона чворова, остаје као променљива у систему једначина МНА, и додаје се једначина операционог појачавача. Систем једначина МНА је скуп следећих једначина:

$$\begin{aligned} \text{КЗС1:} \quad & \frac{v_1}{R_5} + 0 = 0 \\ \text{КЗС2:} \quad & \frac{v_2 - v_5}{R_1} + 0 + \frac{v_2 - v_4}{R_2} = 0 \\ \text{КЗС3:} \quad & \frac{v_3}{R_6} + i_{\text{OpAmp}} + \frac{v_3 - v_4}{R_4} = 0, \quad v_1 - v_2 = 0 \\ \text{КЗС4:} \quad & \frac{v_4 - v_2}{R_2} + \frac{v_4}{R_3} + \frac{v_4 - v_3}{R_4} = 0 \\ \text{КЗС5:} \quad & i_{\text{ug}} + \frac{v_5 - v_2}{R_1} = 0, \quad v_5 = u_g \end{aligned}$$

Променљиве система једначина МНА су напони чворова, v_1 , v_2 , v_3 , v_4 , v_5 , и струје приступа елемената које не могу да се изразе преко напона чворова, i_{OpAmp} , i_{ug} .

Корак 4

Решити систем једначина МНА. У задатку се тражи само напонско појачање $A = \frac{u}{u_g}$, $u = v_3$.

Не траже се струје.

Посматрајмо једначине МНА и запазимо да се струја i_{OpAmp} појављује као једина струја само у једној једначини КЗС3. Изоставимо ту једначину.

Струја напонског извора се, такође, појављује као једина струја само у једној једначини КЗС5. Изоставимо ту једначину. Добијамо мањи (редукован) систем једначина.

$$\begin{aligned} \frac{v_1}{R_5} &= 0 \\ \frac{v_2 - v_5}{R_1} + \frac{v_2 - v_4}{R_2} &= 0 \\ v_1 - v_2 &= 0 \\ \frac{v_4 - v_2}{R_2} + \frac{v_4}{R_3} + \frac{v_4 - v_3}{R_4} &= 0 \\ v_5 &= u_g \end{aligned}$$

На основу једначина елемената можемо уклонити (елиминисати) променљиве v_2 и v_5 .

$$\begin{aligned} \frac{v_1}{R_5} &= 0 \\ \frac{v_1 - u_g}{R_1} + \frac{v_1 - v_4}{R_2} &= 0 \\ \frac{v_4 - v_1}{R_2} + \frac{v_4}{R_3} + \frac{v_4 - v_3}{R_4} &= 0 \end{aligned}$$

Из прве једначине је $v_1 = 0$ и то замењујемо у друге две.

$$\frac{-u_g}{R_1} + \frac{-v_4}{R_2} = 0$$

$$\frac{v_4}{R_2} + \frac{v_4}{R_3} + \frac{v_4 - v_3}{R_4} = 0$$

Из прве једначине је $v_4 = R_2 \frac{-u_g}{R_1}$ и то замењујемо у преуређену другу једначину.

$$\left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} \right) v_4 = \frac{v_3}{R_4}$$

Корак 5

Сређивањем се добија тражено појачање.

$$v_3 = R_4 \left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} \right) v_4$$

$$v_3 = R_4 \left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} \right) R_2 \frac{-u_g}{R_1}$$

$$A = \frac{v_3}{u_g} = - \left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} \right) \frac{R_2 R_4}{R_1}$$

Израз за појачање се може преуредити на разне облике.

$$A = - \left(\frac{R_4}{R_1} + \frac{R_2 R_4}{R_1 R_3} + \frac{R_2}{R_1} \right)$$

$$A = - \left(\frac{R_4}{R_2} + \frac{R_4}{R_3} + 1 \right) \frac{R_2}{R_1}$$

$$A = \frac{-R_2}{R_1} \left(1 + R_4 \left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \right) \right)$$

Дискусија

Запажамо да је појачање негативно, а такав појачавач се зове инвертујући.

Ако ставимо да $R_4 \rightarrow 0$ и $R_3 \rightarrow \infty$, онда је појачање

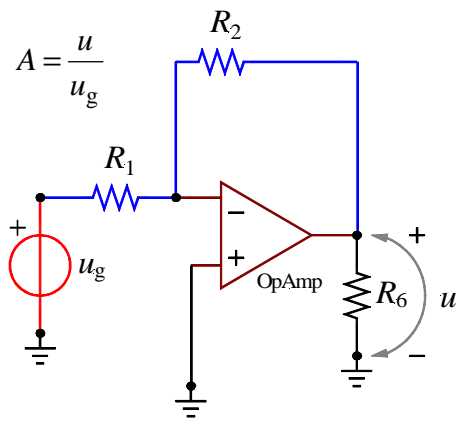
$$A_1 = \frac{-R_2}{R_1}$$

а отпорник R_3 можемо изоставити са шеме и отпорник R_4 заменити кратким спојем.

Отпорник R_5 не утиче на појачање па га можемо заменити кратком везом да бисмо очували повезаност ОпАмр прикључка плус, чвор ①, са упоредним чвором.

Отпорник R_6 је, на пример, потрошач и видимо да он, такође, не утиче на појачање.

Добија се једноставнија шема инвертујућег појачавача.



Практични захтеви

Зашто појачавач не пројектујемо само са два отпорника? Чему служи шема са отпорничком Т-мрежом? Која је користи од ње?

Одговоримо на ова питања кроз бројчани пример. Направимо (испројектујмо) појачавач чије је појачање -100 . За шему са два отпорника је, тада, $R_2 = 100R_1$. Распон вредности елемената (element spread) је $1:100$! На пример, за $R_1 = 10\text{k}\Omega$ би био потребан $R_2 = 1\text{M}\Omega$. Отпорници велике отпорности могу имати нежељену паразитну капацитивност која није добра за рад појачавача.

Посматрајмо сада инвертујући појачавач са Т-шемом. Вредности елемената $R_1 = 10\text{k}\Omega$, $R_2 = 100\text{k}\Omega$, $R_3 = 12.5\text{k}\Omega$, $R_4 = 100\text{k}\Omega$, остварују циљно појачање -100 , али је распон вредности елемената $1:10$. Распон је 10 пута мањи него код шеме са два отпорника!

Интересантан је пример остваривања појачавача појачања -3 . Инвертујући појачавач са Т-шемом остварује ово појачање са 4 идентична отпорника, распон је $1:1$.

Општи закључак је да се инжењерско решење мора тражити као компромис сложености шеме и распона вредности елемената.

Самосталан рад

Како бисте остварили појачавач са појачањем -6 ?

Симболичка анализа

Коло се може решити програмом SALECх. Видети прилог.

Application of Free Software and Open Hardware, PSSOH 2019, International Conference, University of Belgrade – School of Electrical Engineering, Belgrade, Serbia, Oct. 26, 2019.

<http://pssoh.etf.bg.ac.rs/>

Primena slobodnog softvera i otvorenog hardvera

<http://pssoh.etf.bg.ac.rs/>

<https://github.com/pssoh/SALECх>

https://zenodo.org/record/3464103#.XY-nt2ZS_IU

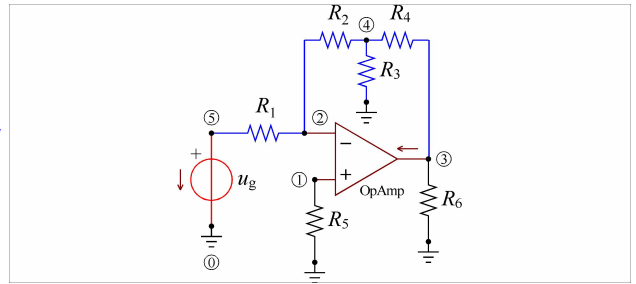
DOI: 10.5281/zenodo.3464103

```
(%i1) load("C:\\SALECx\\SALECx.mac") $
```

Dejan Tosic, SALECx 2019 v1.0

Symbolic Analysis of Linear Electric Circuits with Maxima

```
(%i2) invAmpT_Schema: [
  ["V", "Ug", 5, 0, Ug],
  ["R", "R1", 5, 2, R1],
  ["OpAmp", "OpAmp", [1, 2], 3],
  ["R", "R2", 2, 4, R2],
  ["R", "R3", 4, 0, R3],
  ["R", "R4", 4, 3, R4],
  ["R", "R5", 1, 0, R5],
  ["R", "R6", 3, 0, R6]
] $
```



```
(%i3) SALECxPrint: true $
```

```
(%i4) invAmpT_Odziv: SALECx(invAmpT_Schema);
```

Symbolic Analysis of Linear Electric Circuits with Maxima

SALECx version 1.0, Prof. Dr. Dejan Tošić, tosic@etf.rs

Number of nodes excluding 0 node: 5

Electric circuit specification: $[[V, Ug, 5, 0, Ug], [R, R1, 5, 2, R1], [OpAmp, OpAmp, [1, 2], 3], [R, R2, 2, 4, R2], [R, R3, 4, 0, R3], [R, R4, 4, 3, R4], [R, R5, 1, 0, R5], [R, R6, 3, 0, R6]]$

Supported element: $[true, true, true, true, true, true, true, true]$

Element values: $[Ug, R1, false, R2, R3, R4, R5, R6]$

Initial conditions: $[false, false, false, false, false, false, false, false]$

MNA equations: $\left[\frac{V_1}{R_5} = 0, \frac{V_2 - V_4}{R_2} + \frac{V_2 - V_5}{R_1} = 0, \frac{V_3}{R_6} + \frac{V_3 - V_4}{R_4} + I_{OpAmp} = 0, \frac{V_4 - V_3}{R_4} + \frac{V_4}{R_3} + \frac{V_4 - V_2}{R_2} = 0, \frac{V_5 - V_2}{R_1} + I_{Ug} = 0, V_1 - V_2 = 0, V_5 = Ug \right]$

MNA variables: $[V_1, V_2, V_3, V_4, V_5, I_{OpAmp}, I_{Ug}]$

$(invAmpT_Odziv) [V_1 = 0, V_2 = 0, V_3 = -\frac{R_2(R_4 U_g + R_3 U_g) + R_3 R_4 U_g}{R_1 R_3}, V_4 = -\frac{R_2 U_g}{R_1}, V_5 = U_g,$

$I_{OpAmp} = \frac{R_2(R_6 U_g + R_4 U_g + R_3 U_g) + R_3 R_6 U_g + R_3 R_4 U_g}{R_1 R_3 R_6}, I_{Ug} = -\frac{U_g}{R_1}]$

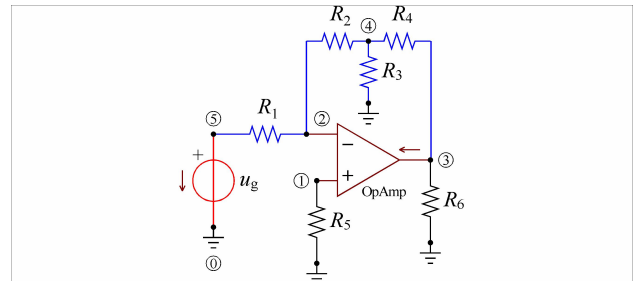
```
(%i5) transpose(invAmpT_Odziv);
```

$$\begin{bmatrix} V_1 = 0 \\ V_2 = 0 \\ V_3 = -\frac{R_2 (R_4 U_g + R_3 U_g) + R_3 R_4 U_g}{R_1 R_3} \\ V_4 = -\frac{R_2 U_g}{R_1} \\ V_5 = U_g \\ I_{OpAmp} = \frac{R_2 (R_6 U_g + R_4 U_g + R_3 U_g) + R_3 R_6 U_g + R_3 R_4 U_g}{R_1 R_3 R_6} \\ I_{Ug} = -\frac{U_g}{R_1} \end{bmatrix}$$

```
(%o5)
```

```
(%i6) A: V[3]/Ug, invAmpT_Odziv, expand;
```

```
(A) -\frac{R_2 R_4}{R_1 R_3} - \frac{R_4}{R_1} - \frac{R_2}{R_1}
```



```
(%i7) Aoblik1: expand(-A*R1)/(-R1);
```

```
(Aoblik1) -\frac{\frac{R_2 R_4}{R_3} + R_4 + R_2}{R_1}
```

```
(%i8) Aoblik2: -substitute(x=R4/R1, collectterms(substitute(R4=x*R1, -A), x));
```

```
(Aoblik2) -\left(\frac{R_2}{R_3} + 1\right) \frac{R_4}{R_1} - \frac{R_2}{R_1}
```

```
(%i9) R3opt: R3, solve(A=Aopt, R3);
```

```
(R3opt) -\frac{R_2 R_4}{R_4 + R_2 + Aopt R_1}
```

```
(%i10) R3opt100: R3opt, [Aopt=-100, R1=10*kOhm, R2=100*kOhm, R4=100*kOhm], ratsimp;
```

```
(R3opt100) \frac{25 \text{ kOhm}}{2}
```

```
(%i11) float(R3opt100);
```

```
(%o11) 12.5 kOhm
```

```
(%i12) A100: substitute([R1=10*kOhm, R2=100*kOhm, R3=(12.5)*kOhm, R4=100*kOhm], A);
```

```
(A100) -100.0
```