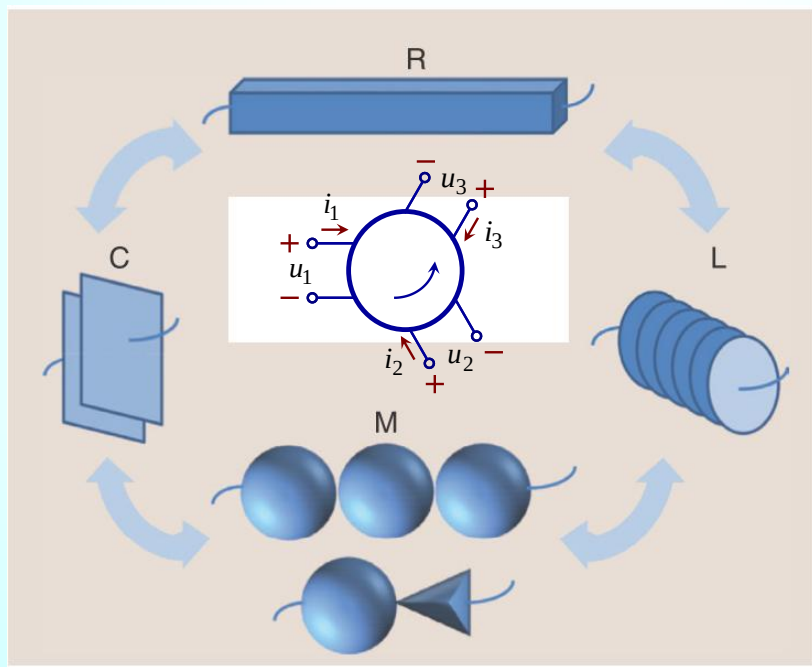


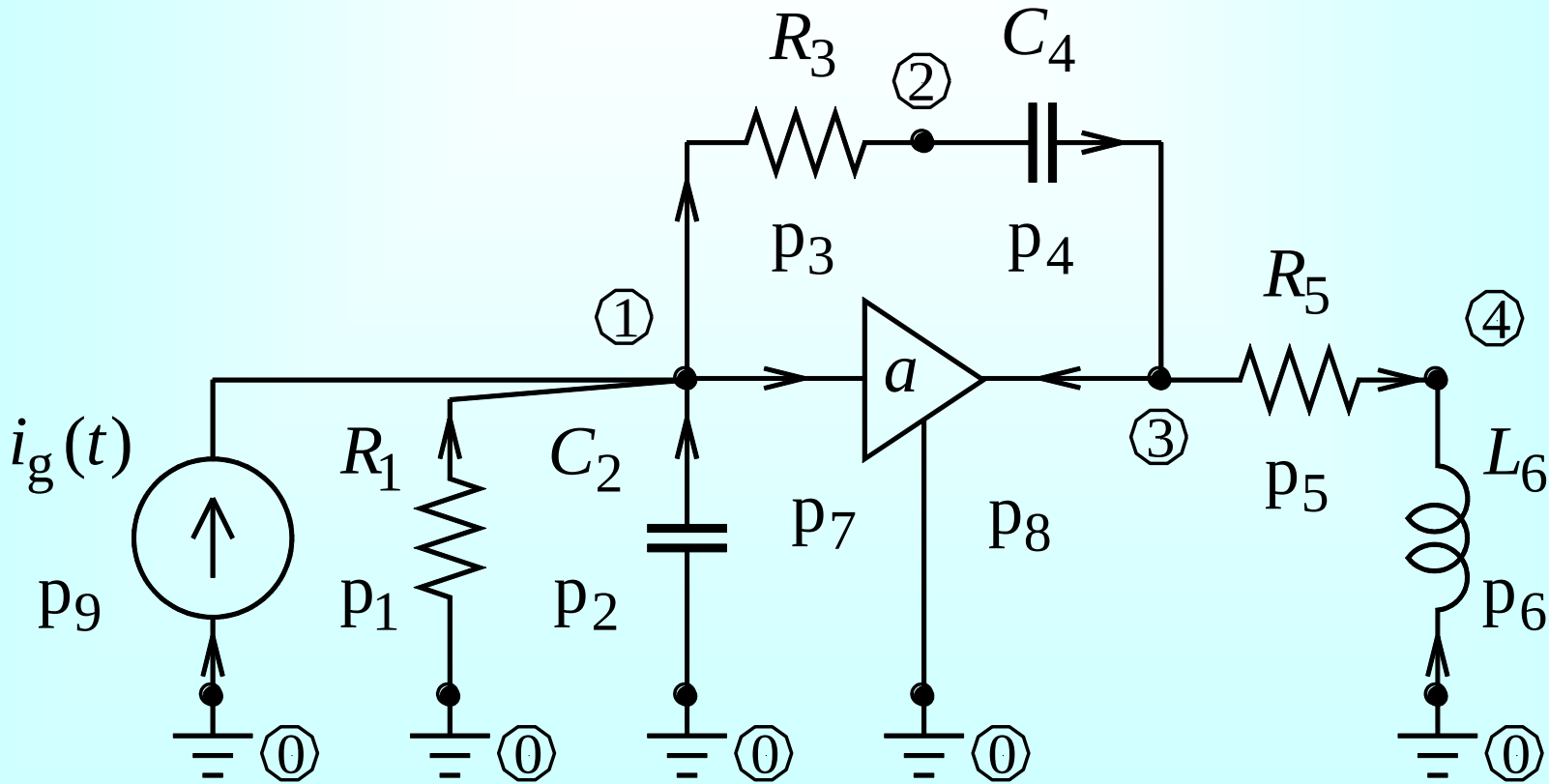
Теорија електричних кола



Милка Потребих

Основи топологије ел. кола

Пример електричног кола



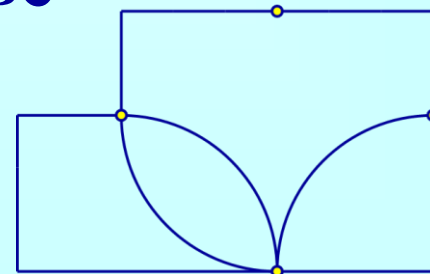
Граф ел. кола, КЗС, КЗН

За дато коло

- 1) Конструисати орјентисани граф ако се прикључак (чвор) **0** усвоји за референтни за коло
- 2) Написати максималан независни систем једначина **КЗС** за чворове
- 3) Систем једначина **КЗН** на основу претходне тачне 2

Граф електричног кола

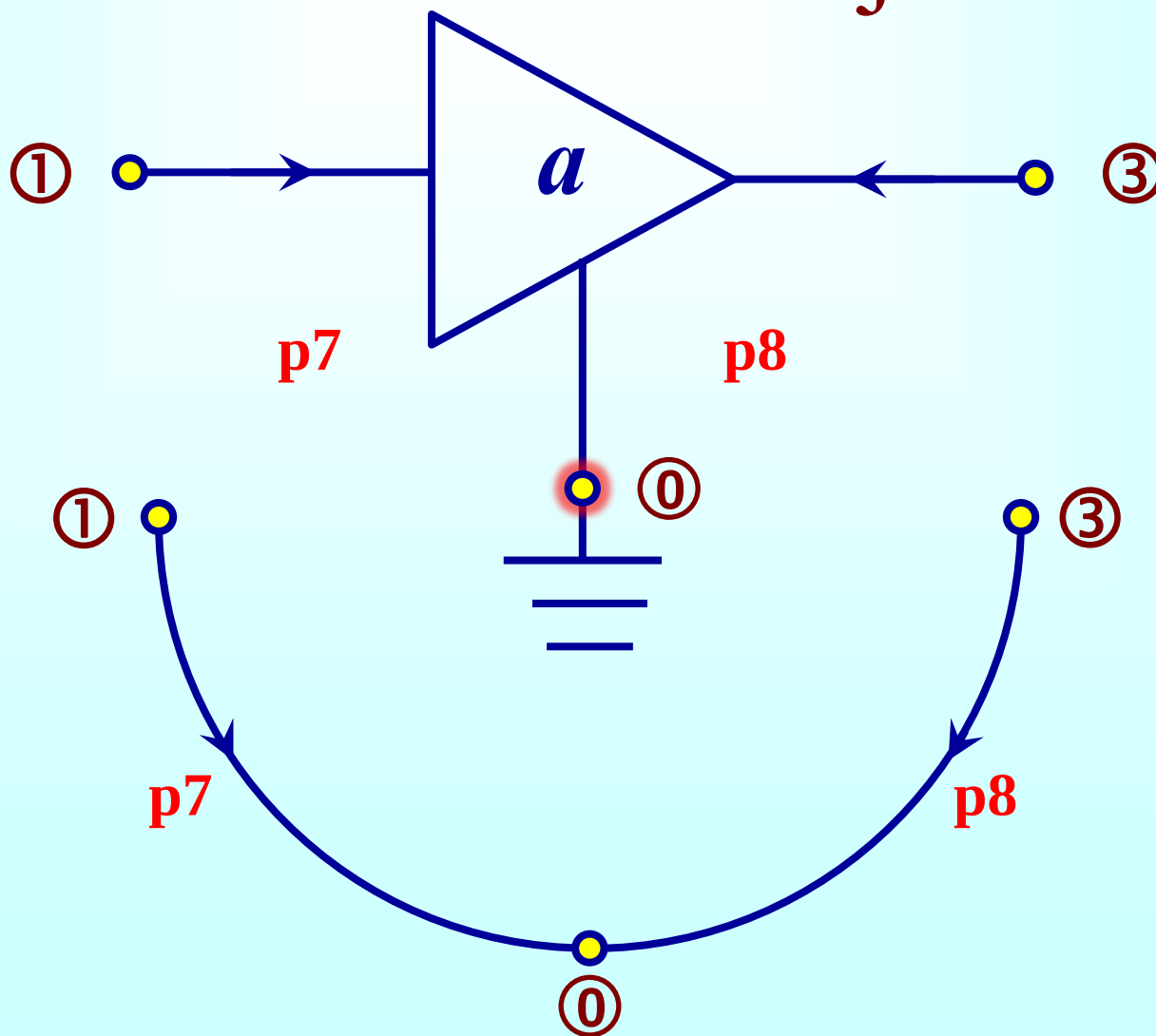
- Упрошћена сликовна представа електричног кола у којој се сваки приступ представља линијом а сваки чвор кружићем назива се **граф** ел. кола
- Ако су усвојени смерови ел. струја, линије које представљају приступе ће бити усмерене и такав граф се зове **усмерени граф** или диграф



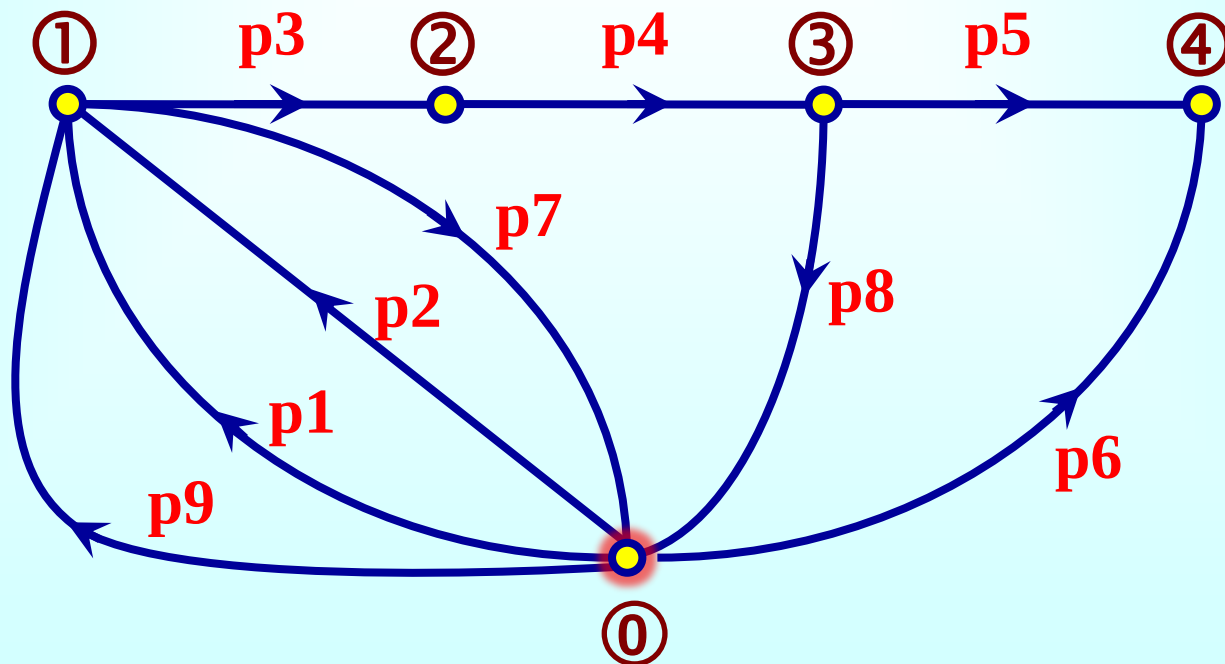
Грана

- **Грана** је линија (дуж или лук) којим се представља приступ у графу ел. кола
- Смер гране је једнак смеру ел. струје
- Смер ел. напона је стандардан – усаглашен са смером ел. струје
- Гране се обележавају узастопним природним бројевима почев од један

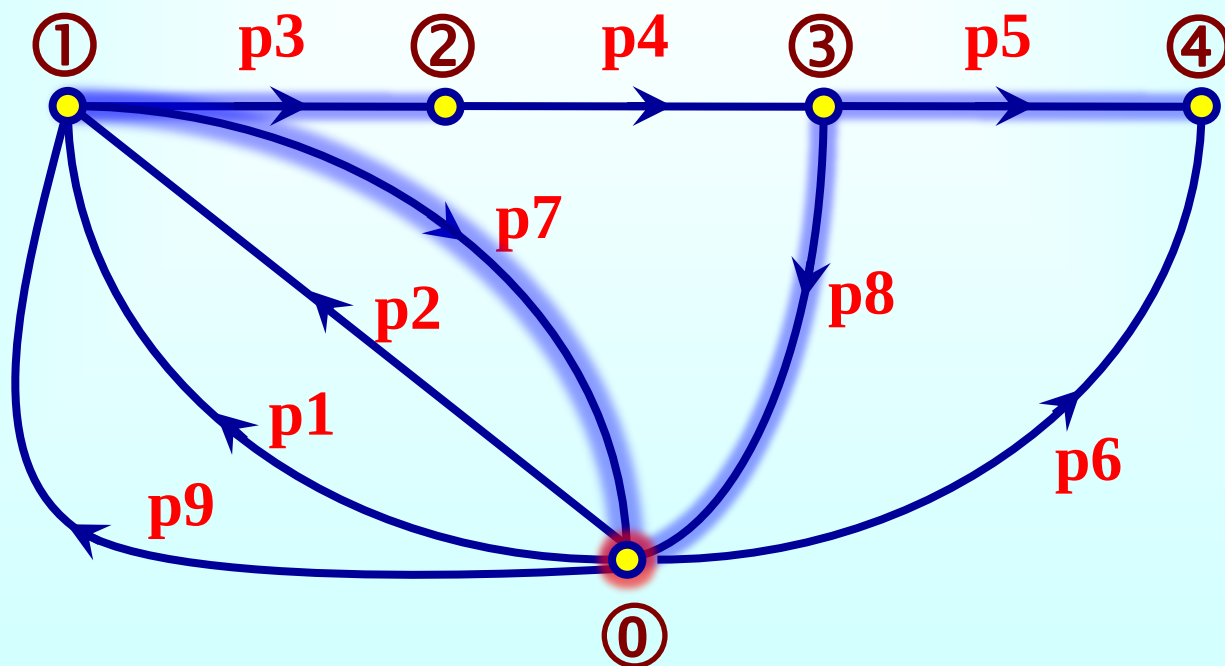
Граф елемента: идеални напонски појачавач



Граф електричног кола

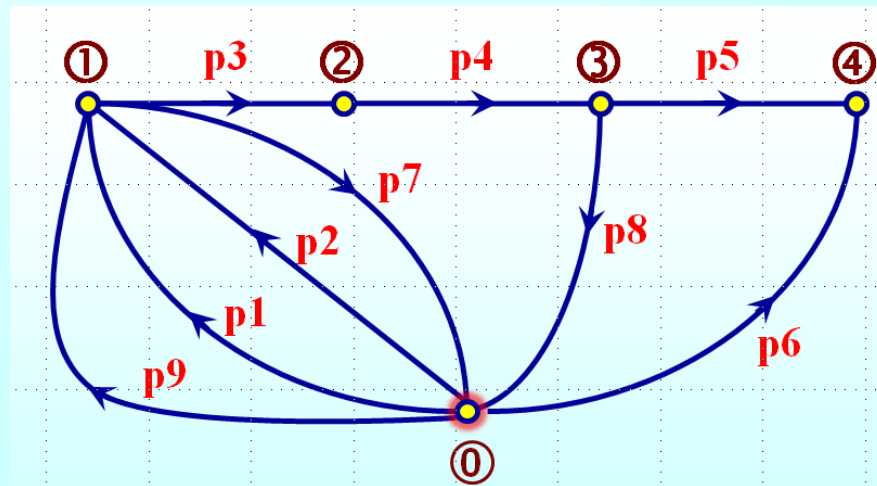


Граф електричног кола са изабраним стаблом



Потпуна матрица инциденције грана и чворова

$$A_a = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & \dots\dots & 7 & 8 & 9 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} & \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ \dots \\ 0 \end{matrix} \end{matrix}$$



Сведена матрица инциденције грана и чворова

$$A_a = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & & \text{.....} & & 7 & 8 & 9 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} & \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ \dots \\ 0 \end{matrix} \end{matrix}$$

Матрица инциденције грана и чворова

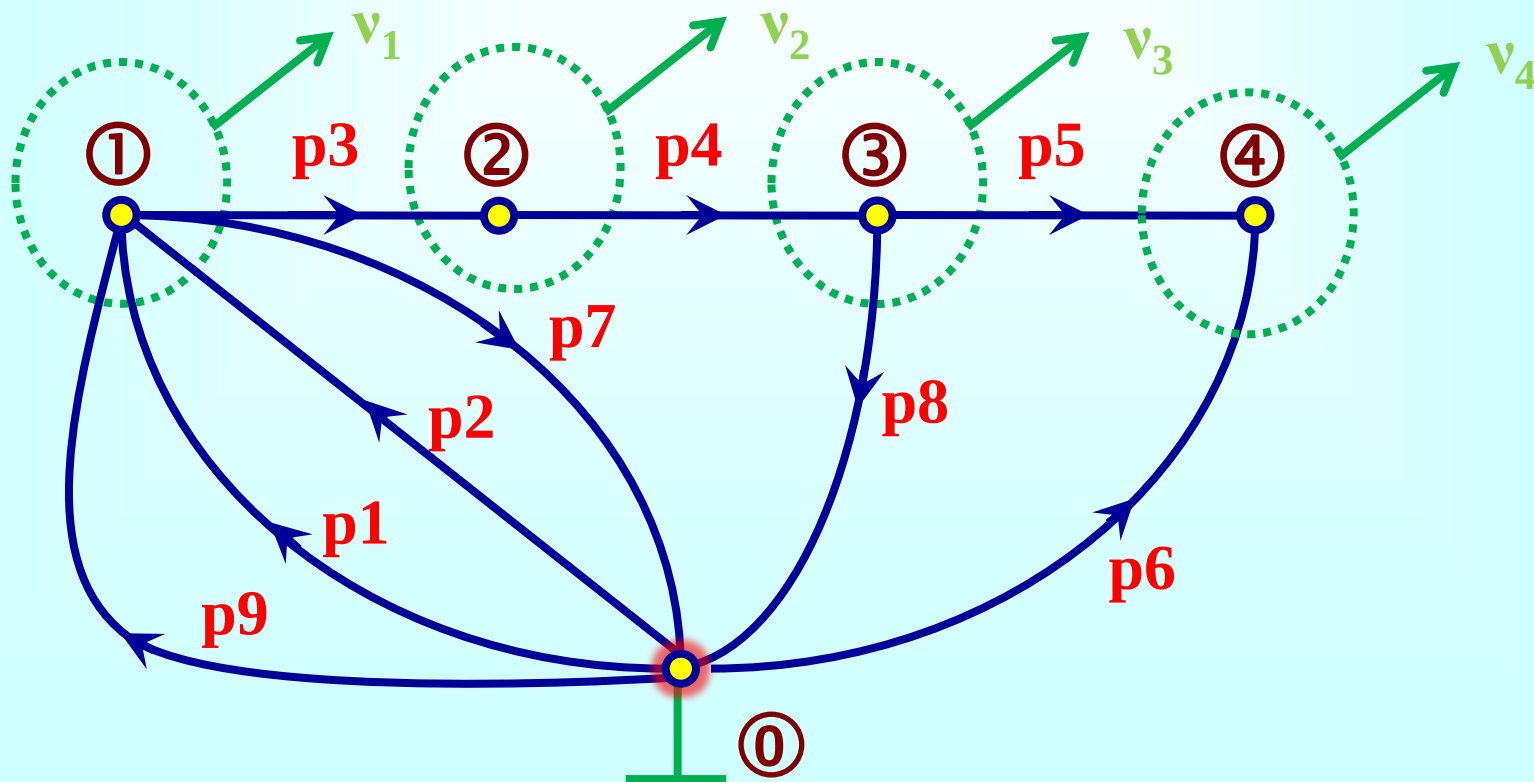
$$A = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & & \text{.....} & & 7 & 8 & 9 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Максималан независни систем једначина КЗС за чворове

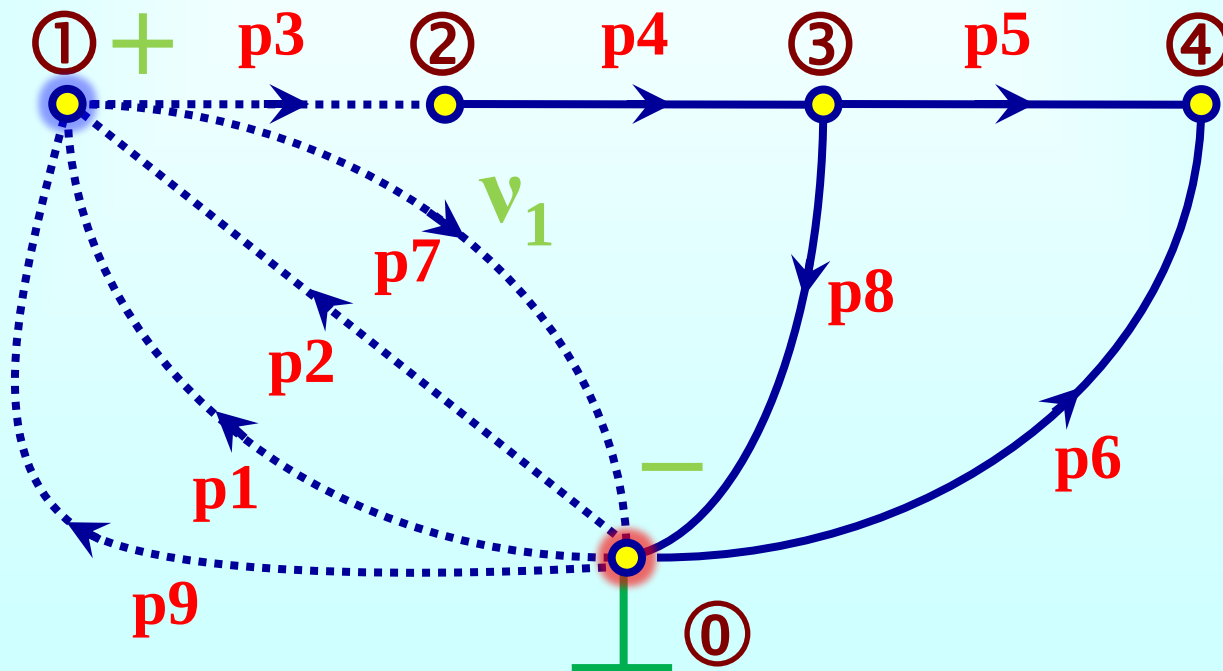
$$A \cdot i = 0$$

$$i = [i_1 \quad i_2 \quad i_3 \quad i_4 \quad i_5 \quad i_6 \quad i_7 \quad i_8 \quad i_9]^T$$

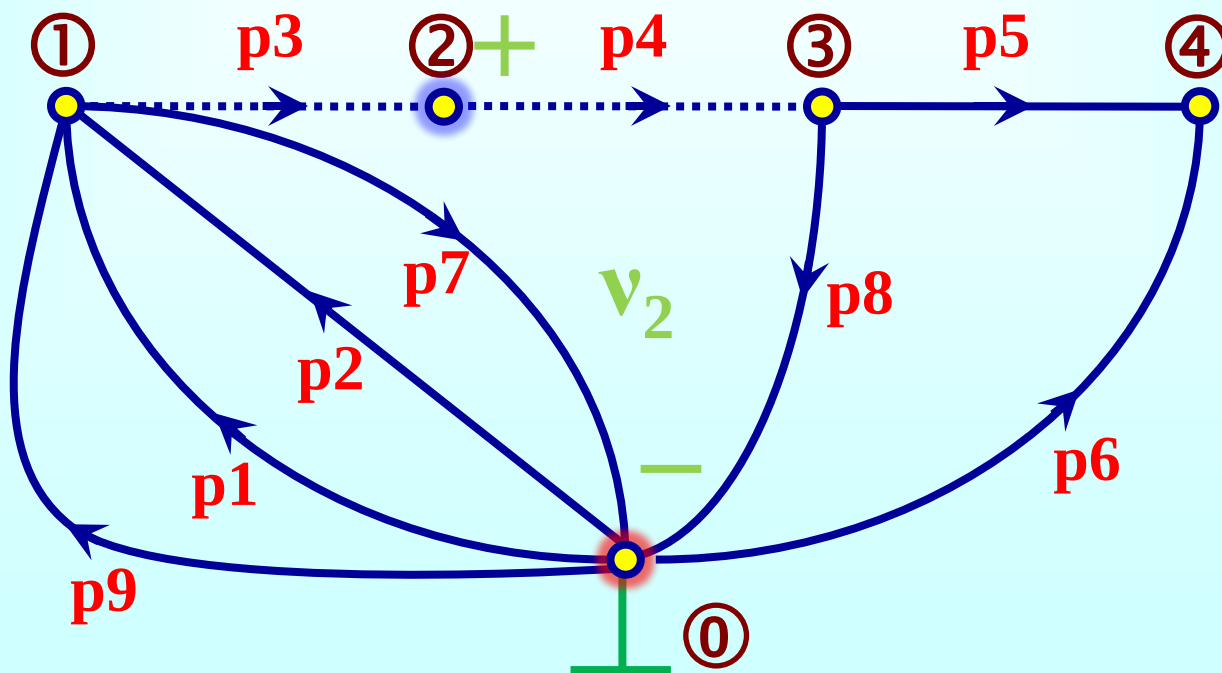
Интерпретација матрице инциденције као матрице независних пресека – чворник пресека



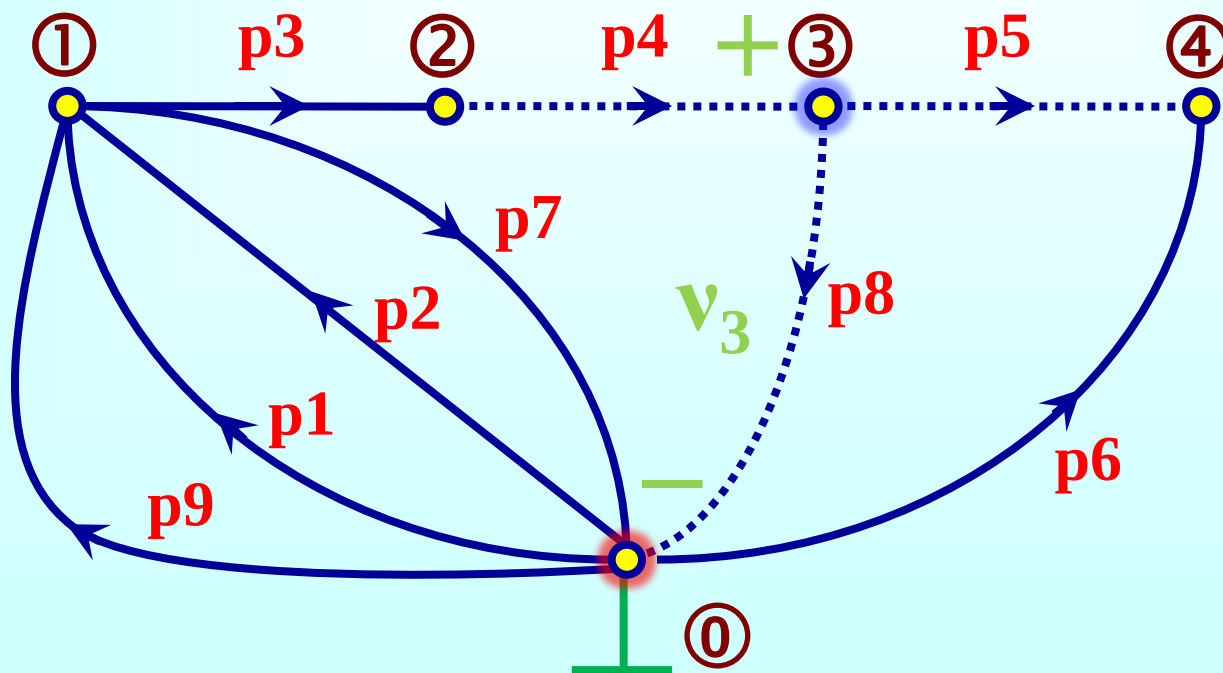
Напон првог (независног) пресека



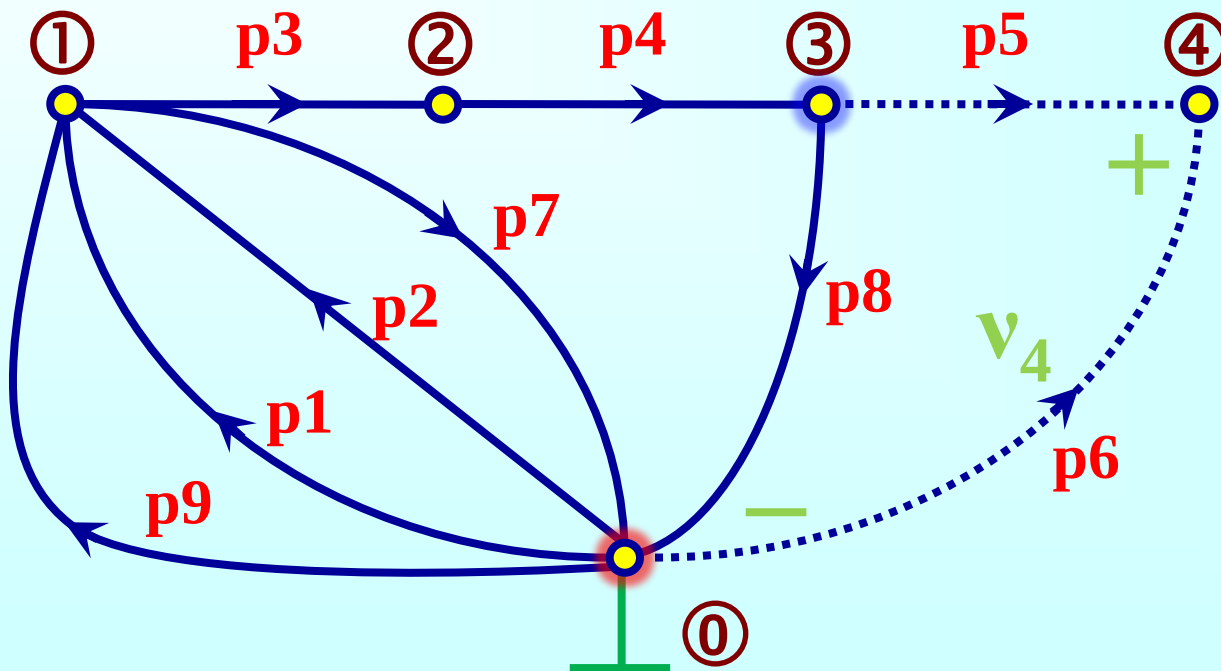
Напон другог (независног) пресека



Напон трећег (независног) пресека



Напон четвртог (независног) пресека

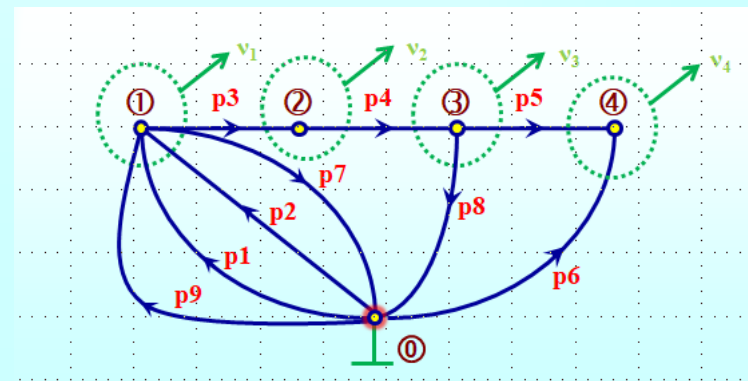


Напони грана, КЗН

$$u = [u_1 \quad u_2 \quad u_3 \quad u_4 \quad u_5 \quad u_6 \quad u_7 \quad u_8 \quad u_9]^T$$

$$\begin{aligned} u_1 &= -v_1 \\ u_2 &= -v_1 \\ u_3 &= v_1 - v_2 \\ u_4 &= v_2 - v_3 \\ u_5 &= v_3 - v_4 \\ u_6 &= -v_4 \\ u_7 &= v_1 \\ u_8 &= v_3 \\ u_9 &= -v_1 \end{aligned} \quad \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \\ u_7 \\ u_8 \\ u_9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{bmatrix}$$

$$u = A^T \cdot v$$



K3H

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \\ u_7 \\ u_8 \\ u_9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{bmatrix}$$

$$u = A^T \cdot v$$

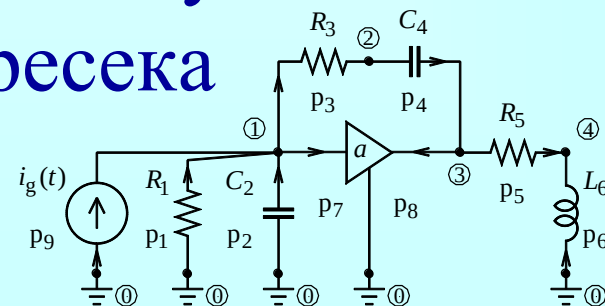
$$u = [u_1 \quad u_2 \quad u_3 \quad u_4 \quad u_5 \quad u_6 \quad u_7 \quad u_8 \quad u_9]^T$$

$$v = [v_1 \quad v_2 \quad v_3 \quad v_4]^T$$

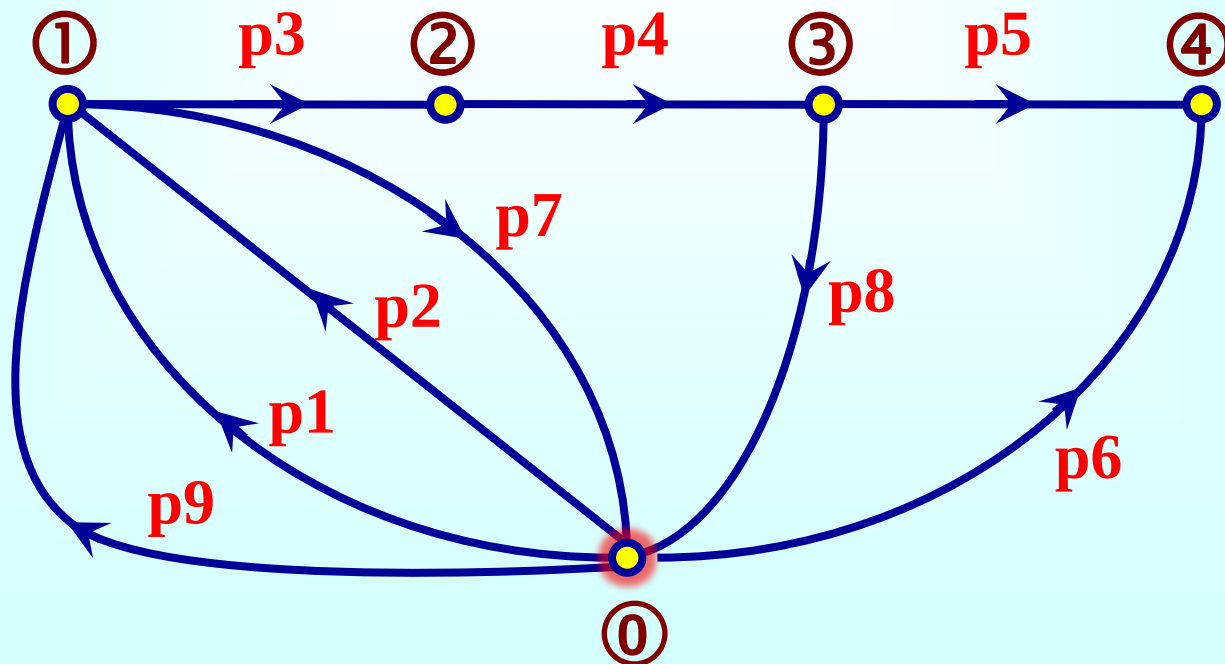
Граф ел. кола, КЗС, КЗН

За коло приказано у претходном задатку

- 1) Конструисати орјентисани граф ако је чвор **0** референтни за коло
- 2) Изабрати једно стабло и одредити фундаменталне пресеке
- 3) Написати максималан независни систем једначина **КЗС**, као и одговарајући систем једначина **КЗН**, на основу матрица фундаменталних пресека



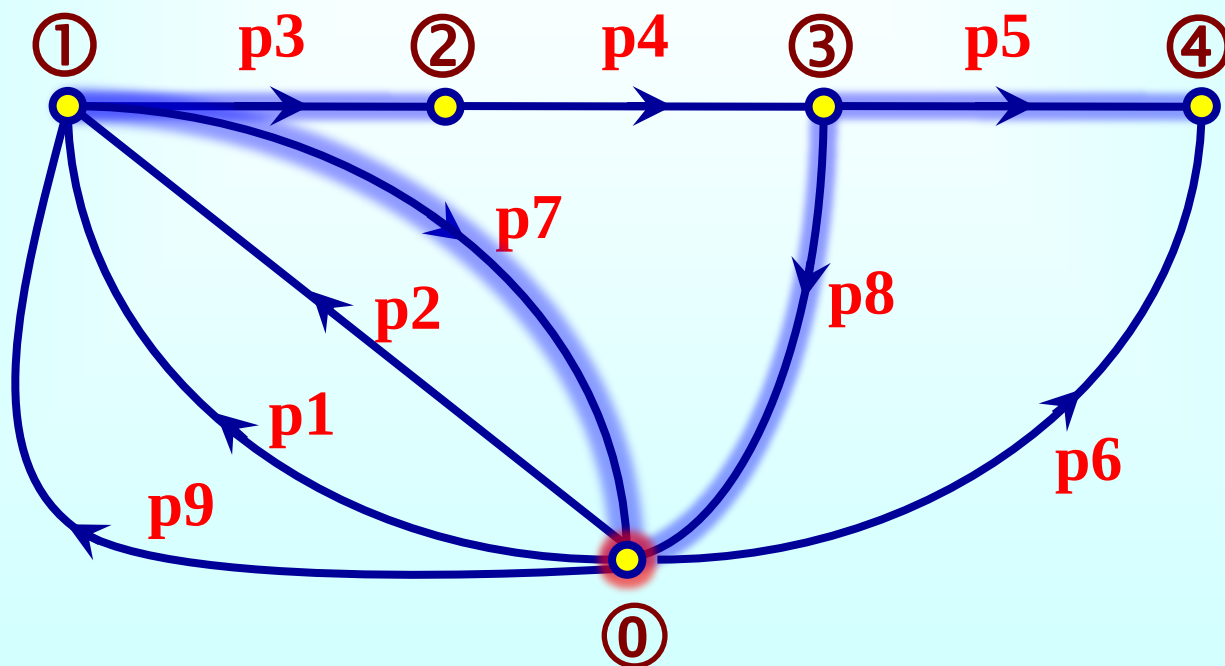
Граф електричног кола



Субграф, Стабло, Спојница

- **Субграф** је део графа
- **Стабло** је повезани субграф без контура који садржи све чворове
- **Спојница** је грана која не припада стаблу
- Граф је **планаран** ако се може нацртати у равни тако да се гране не секу
- Граф је **неповезан** ако постоје бар два чвора између којих не постоји пут

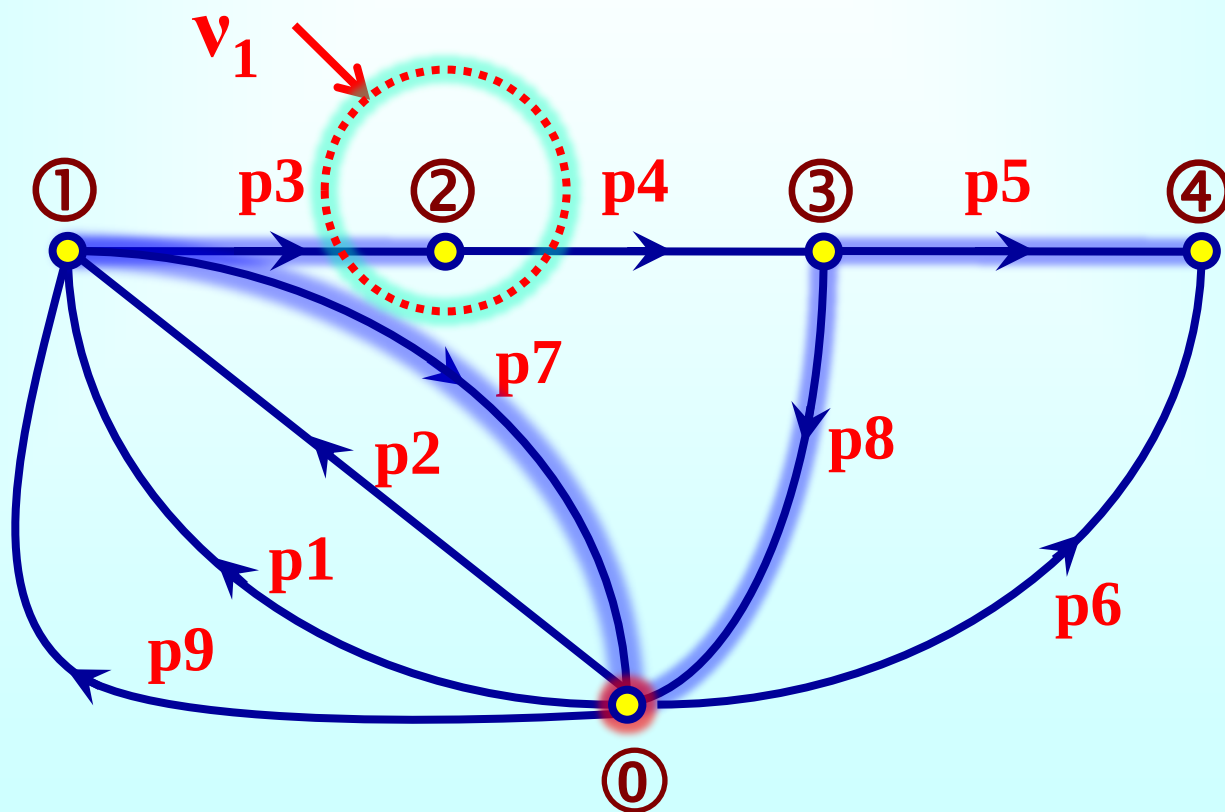
Граф електричног кола са изабраним стаблом



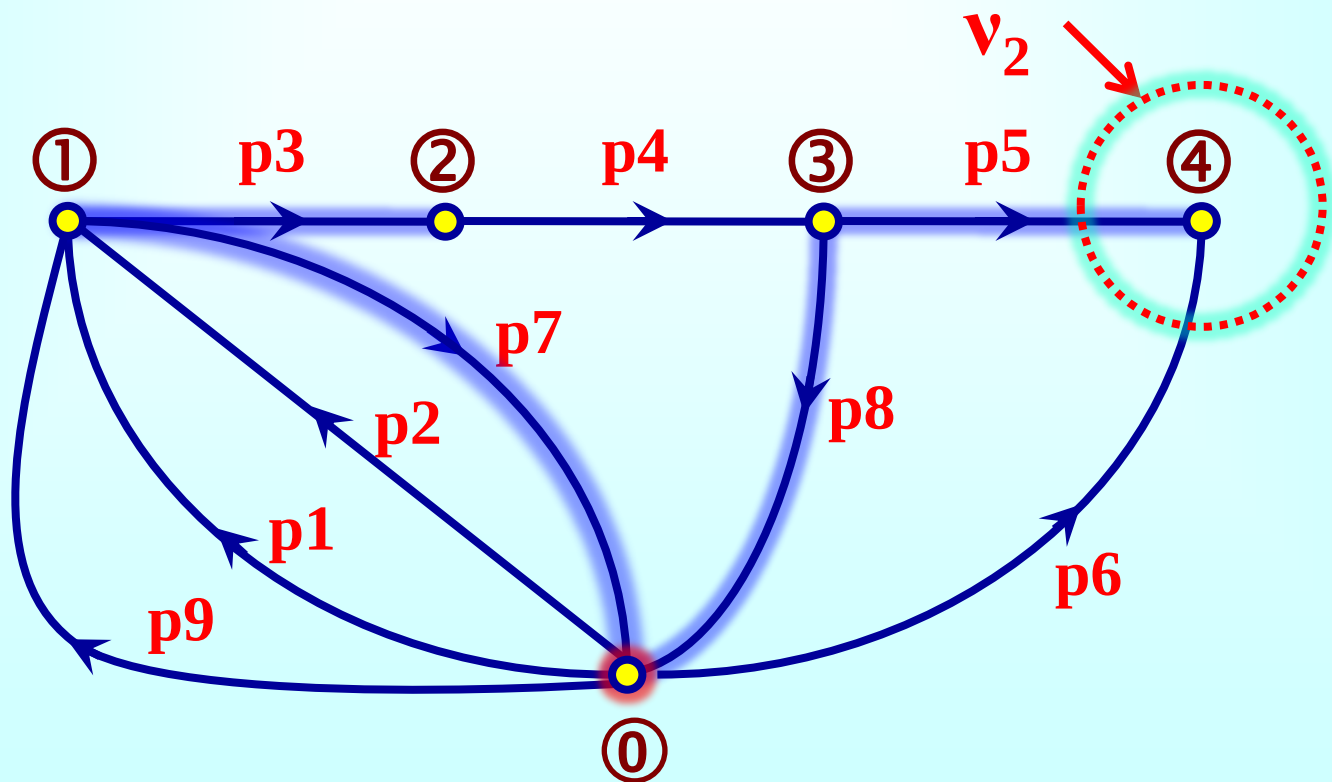
Фундаментални пресеци

- **Фундаментални пресек** (*ф-пресек*, *главни пресек*) је пресек који садржи само једну грану стабла
- Број фундаменталних пресека једнак је броју грана стабла
- Фундаментални пресеци су значајни за постављање једначина електричног кола
- Смер пресека је једнак смеру гране стабла од кога је пресек настао

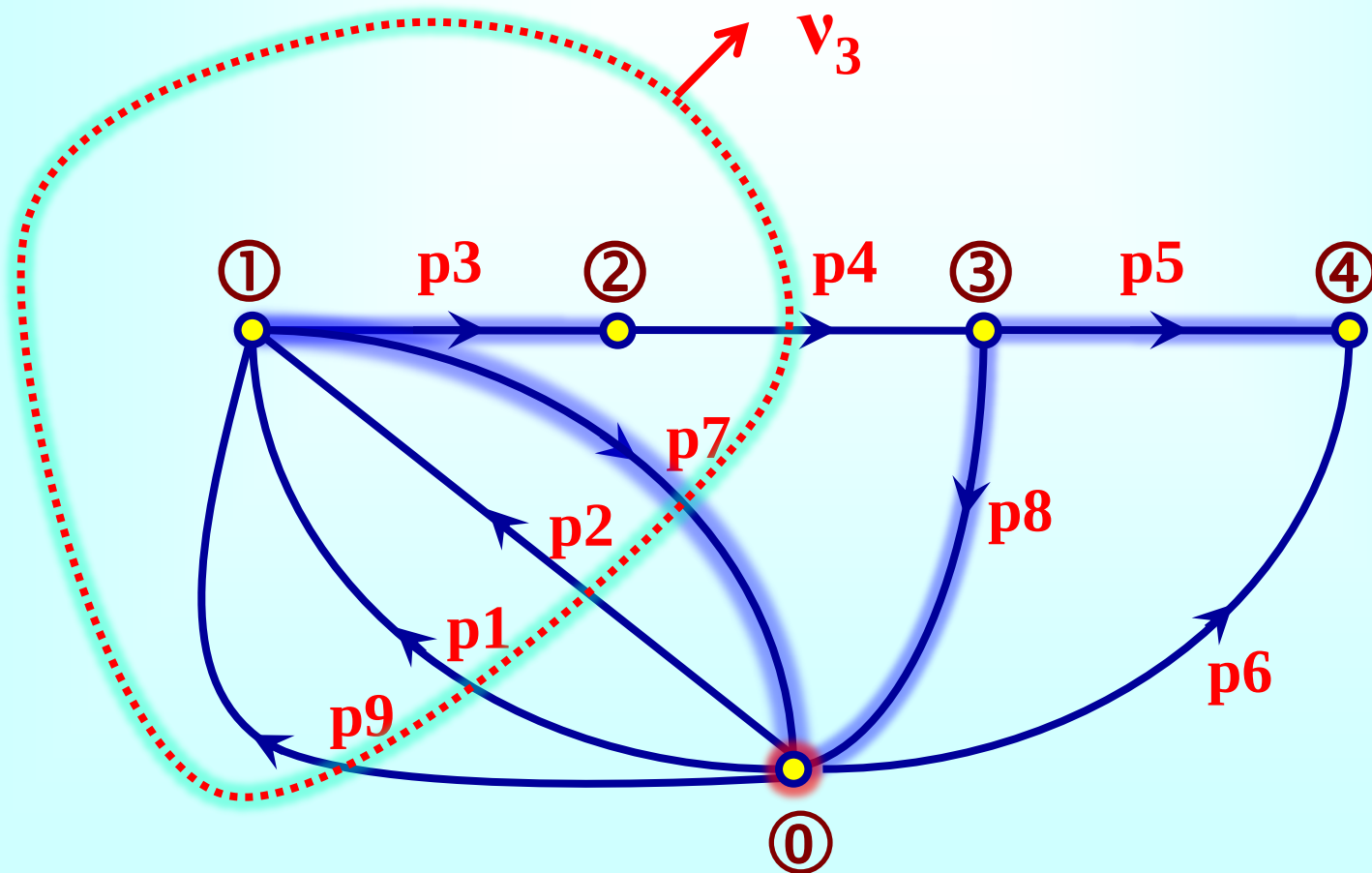
Први фундаментални пресек



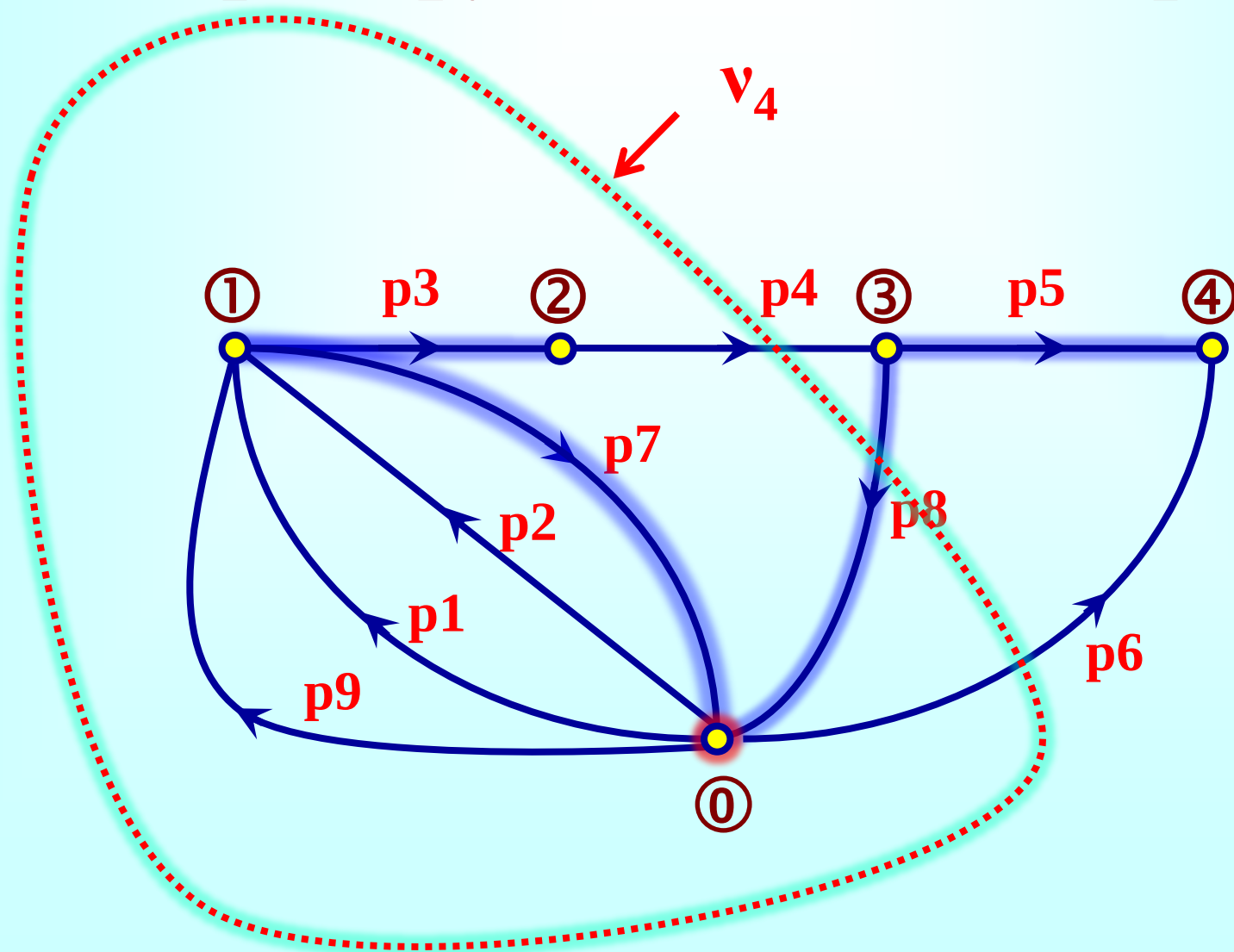
Други фундаментални пресек



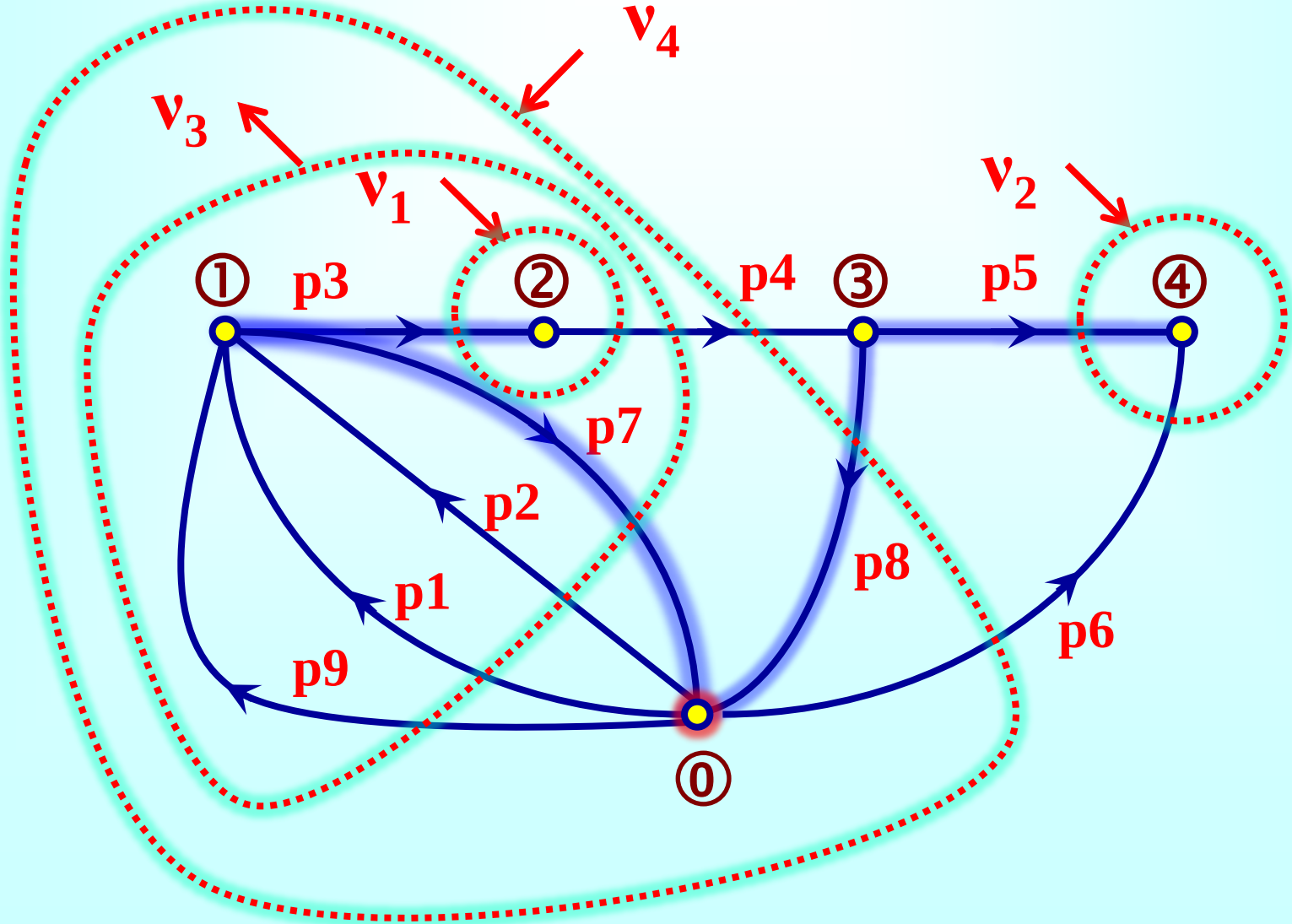
Трећи фундаментални пресек



Четврти фундаментални пресек

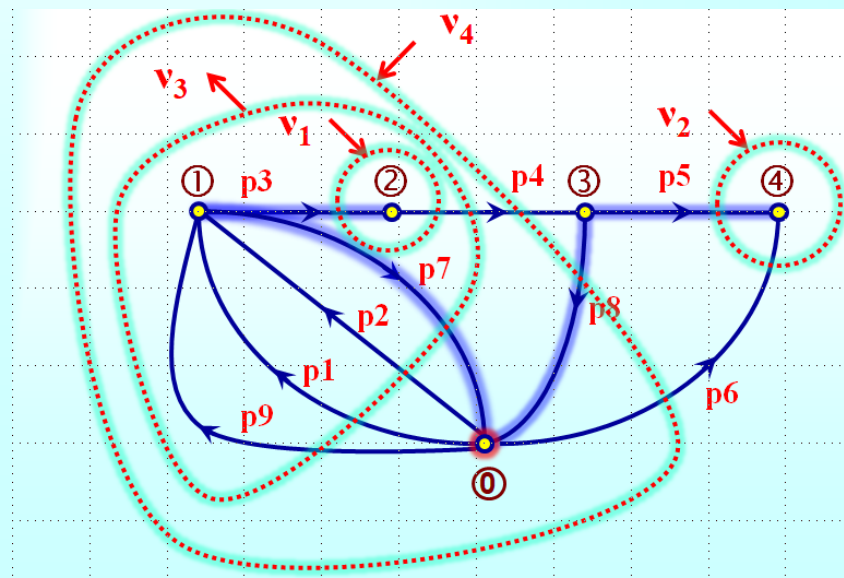


Фундаментални пресеци



Матрица фундаменталних пресека

$$Q_f = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & \dots\dots\dots & 6 & 7 & 8 & 9 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} & \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} \end{matrix}$$



Матрица ф-пресека, КЗС

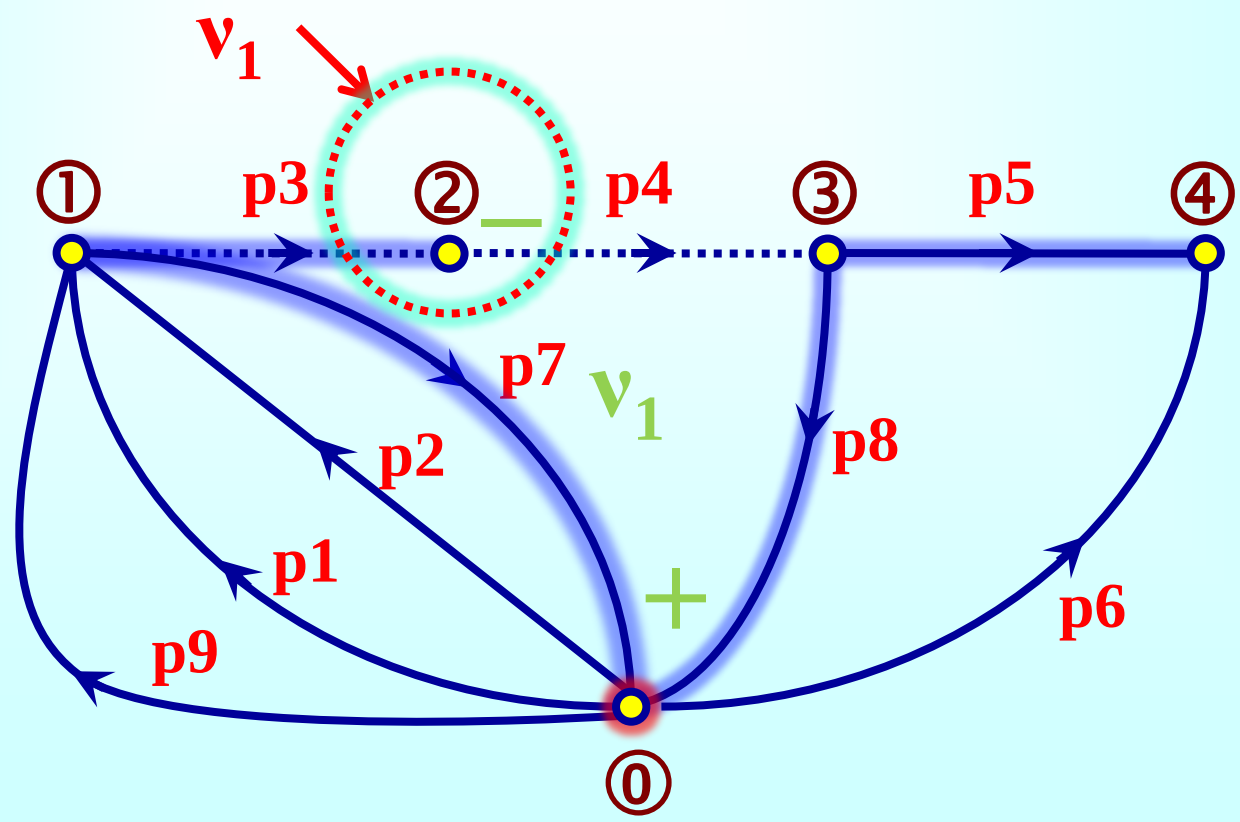
s → stablo
ks → kostablo

$$Q_f = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

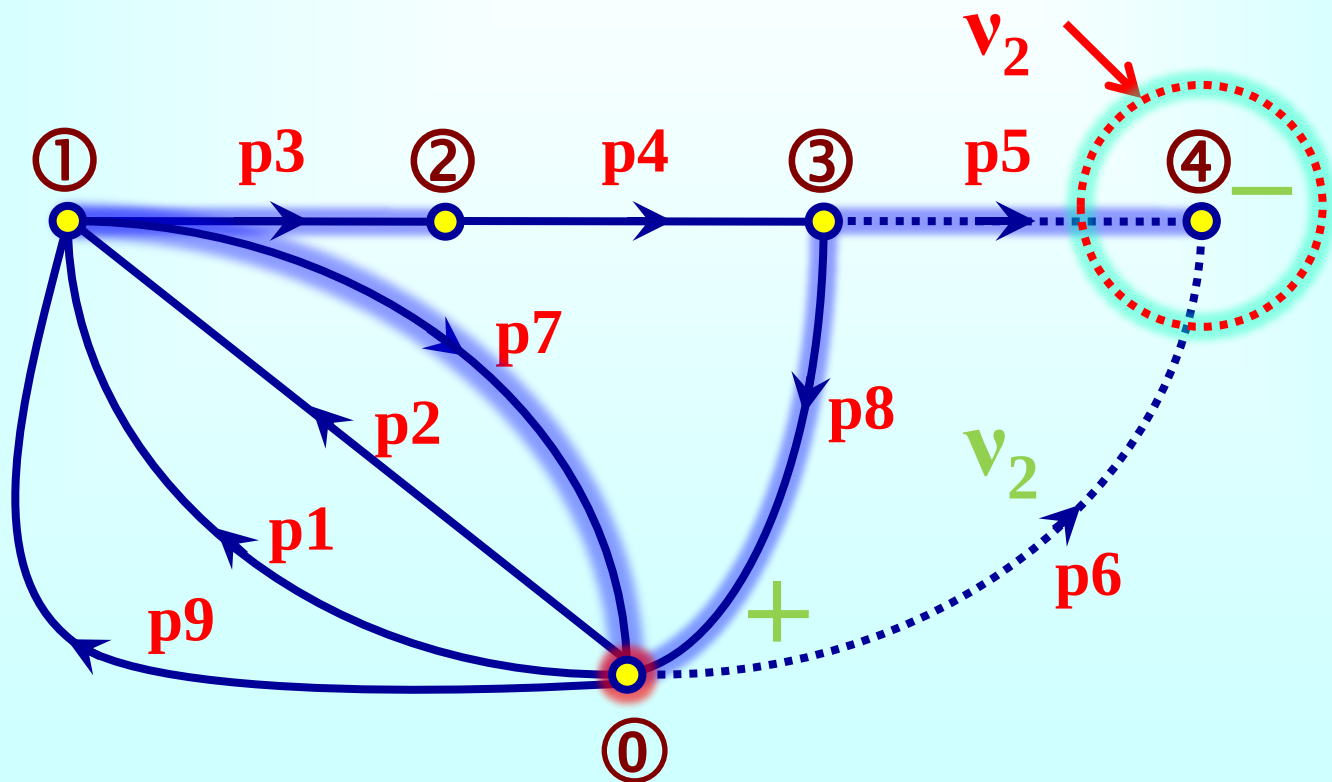
$$Q_{fs} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I_4 \quad Q_f = \begin{bmatrix} Q_{fs} & Q_{fks} \end{bmatrix}$$

$$Q_f \cdot i = 0$$

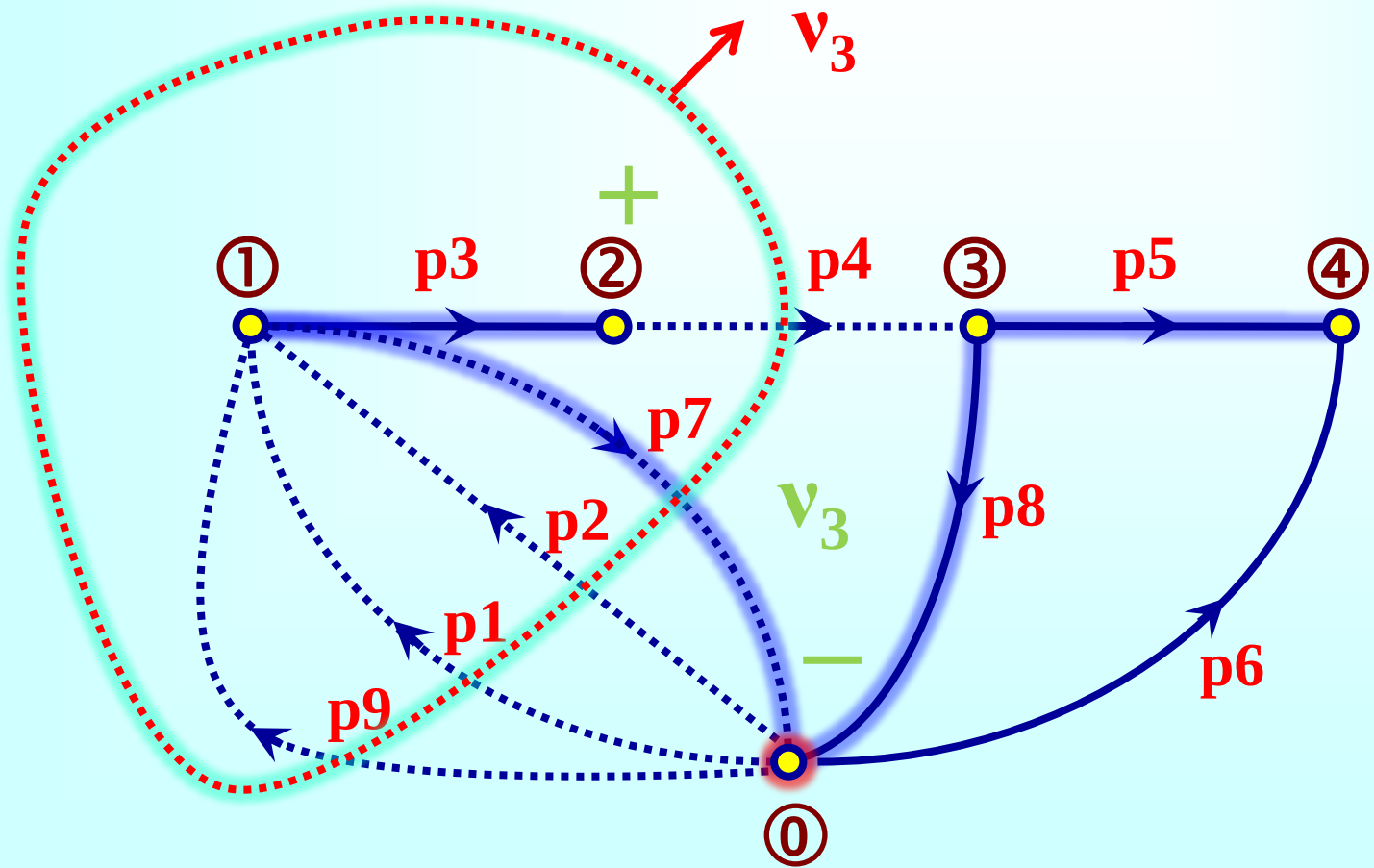
Напон првог независног пресека



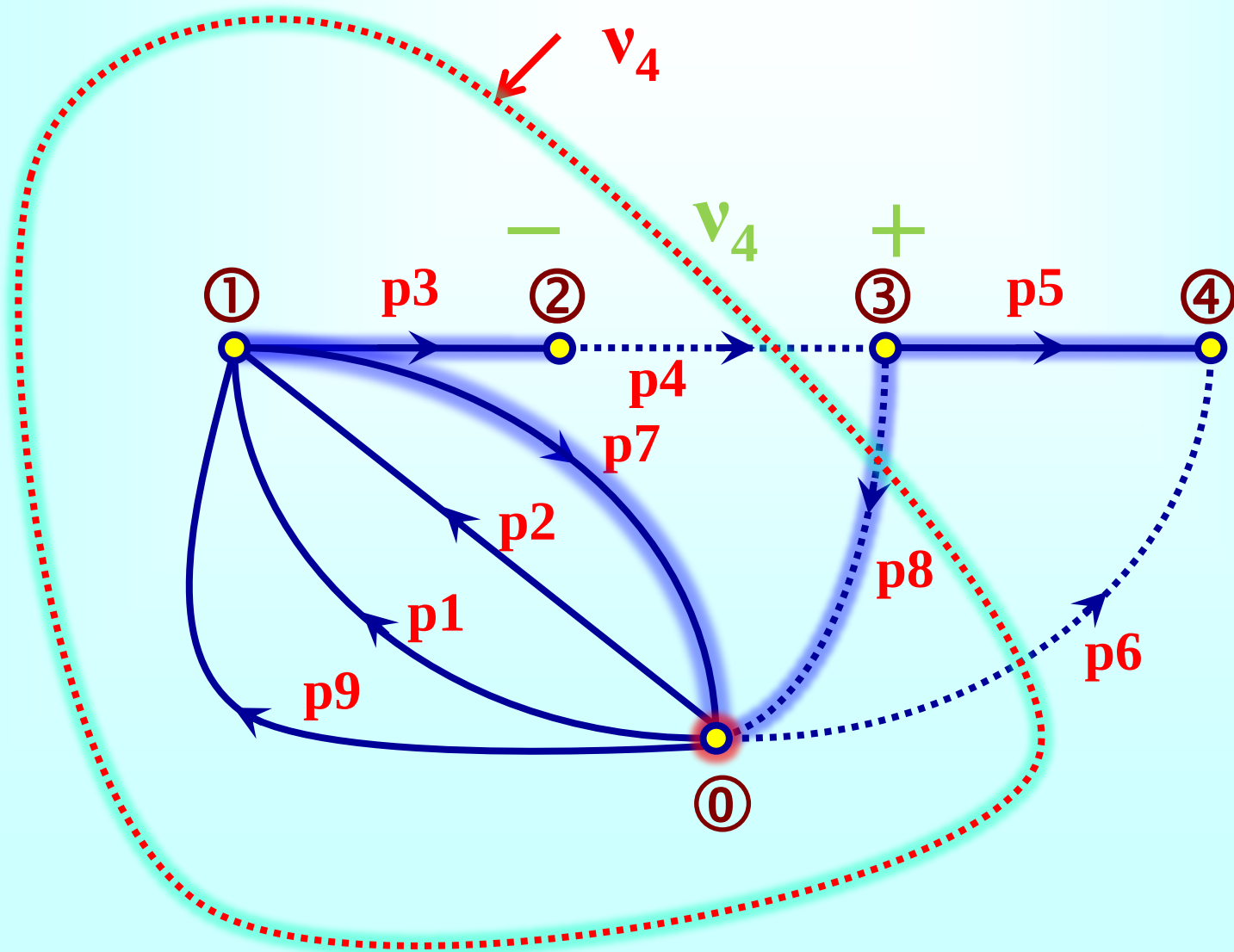
Напон другог независног пресека



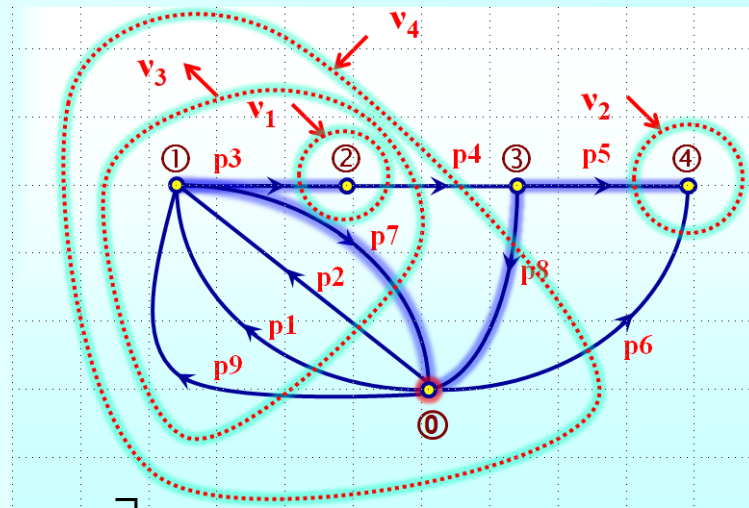
Напон трећег независног пресека



Напон четвртог независног пресека



Напони грана, КЗН



$$u_1 = -v_3$$

$$u_2 = -v_3$$

$$u_3 = v_1$$

$$u_4 = -v_1 + v_3 - v_4$$

$$u_5 = v_2$$

$$u_6 = v_2 - v_4$$

$$u_7 = v_3$$

$$u_8 = v_4$$

$$u_9 = -v_3$$

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \\ u_7 \\ u_8 \\ u_9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{bmatrix}$$

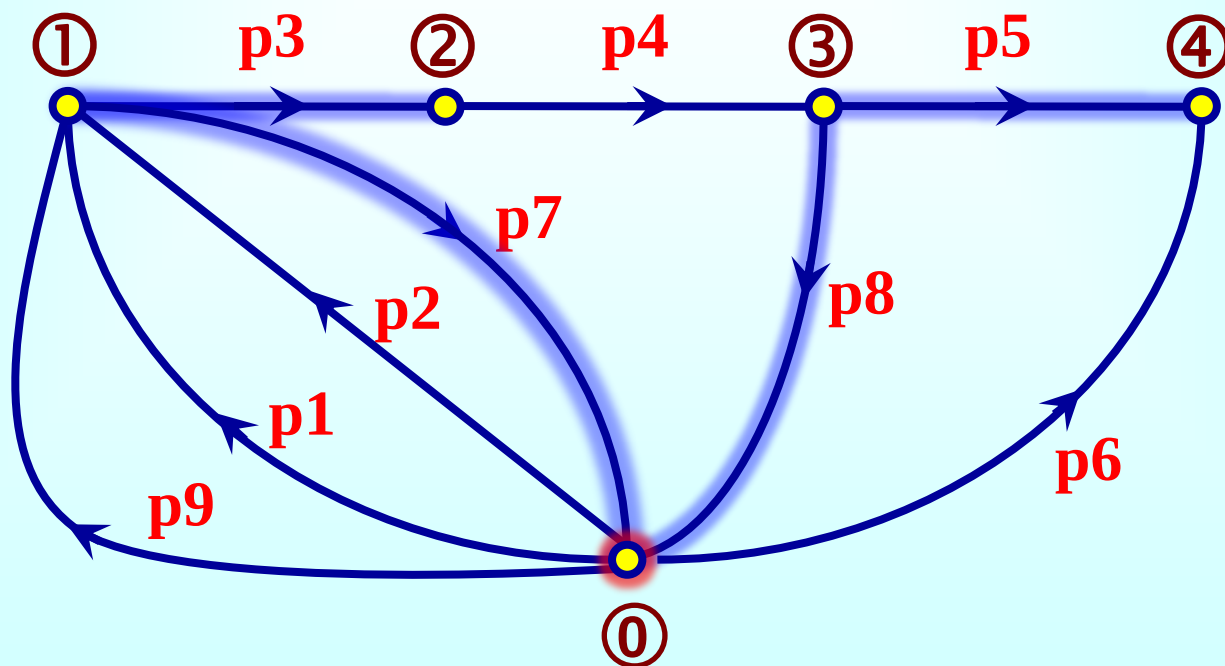
$$u = Q_f^T \cdot v$$

Ф-контуре, КЗС, КЗН

За граф кола и изабрано стабло из претходног задатка

- 1) Одабрати фундаменталне контуре
- 2) Написати максималан независни систем једначина **КЗН**
- 3) Проверити везу једначина **КЗС** и **КЗН** писаних према независним контурама

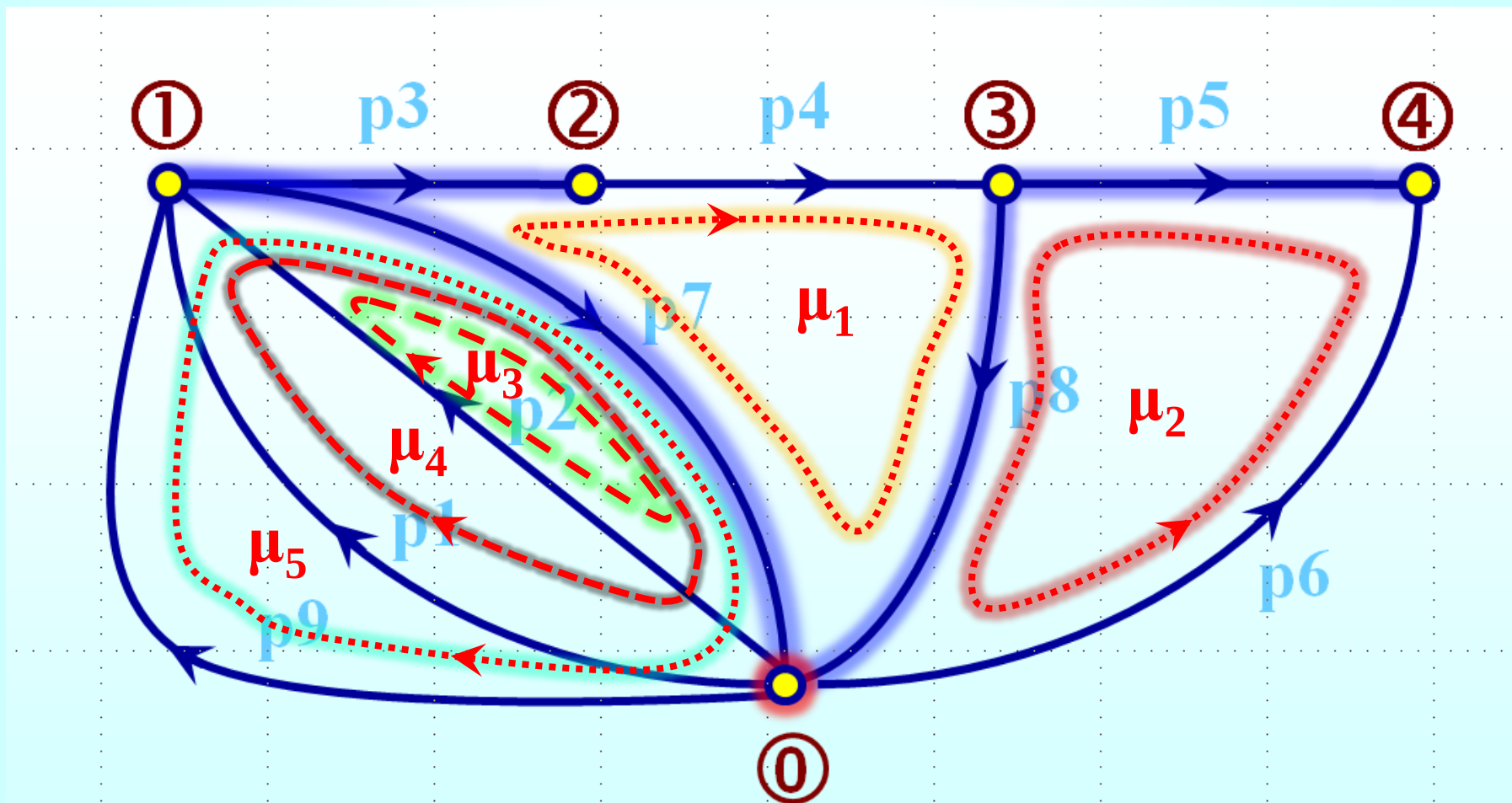
Граф електричног кола са изабраним стаблом



Фундаменталне контуре

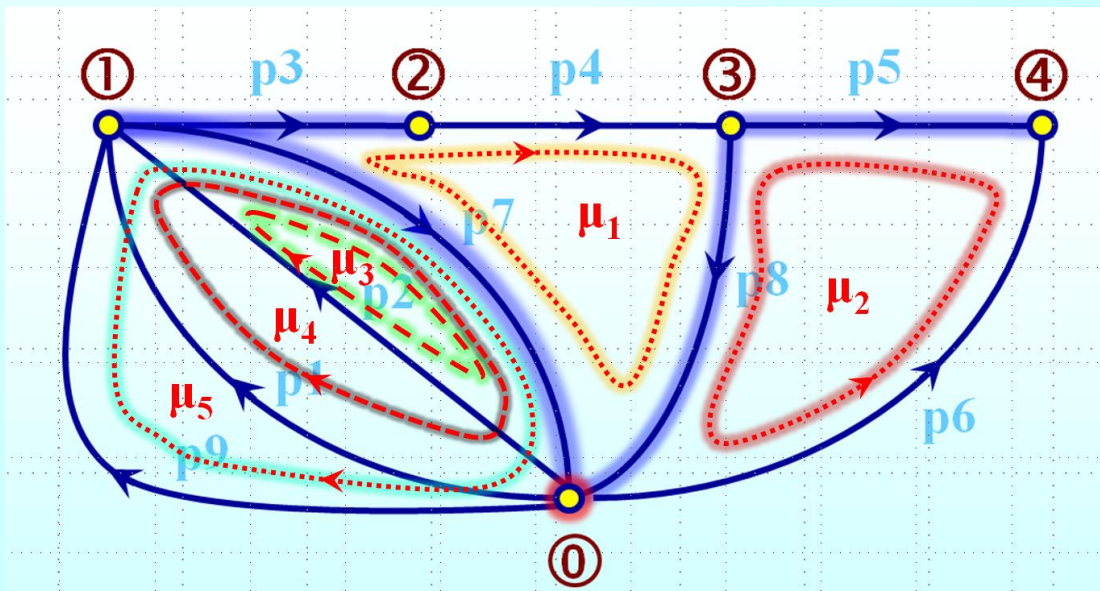
- **Фундаментална контура** (*ϕ -контура*, *главна контура*) је контура образована из стабла додавањем једне спојнице
- Број фундаменталних контура једнак је броју спојница
- Фундаменталне контуре су значајне за постављање једначина електричног кола
- Смер контуре је једнак смеру спојнице

Фундаменталне контуре



Матрица фундаменталних контура

$$B_f = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix}$$



Матрица ϕ -контура, КЗН

$$B_f = \begin{bmatrix} \overset{1}{0} & \overset{2}{0} & \overset{3}{1} & \overset{4}{1} & \overset{5}{0} & \overset{6}{0} & \overset{7}{-1} & \overset{8}{1} & \overset{9}{0} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{matrix}$$

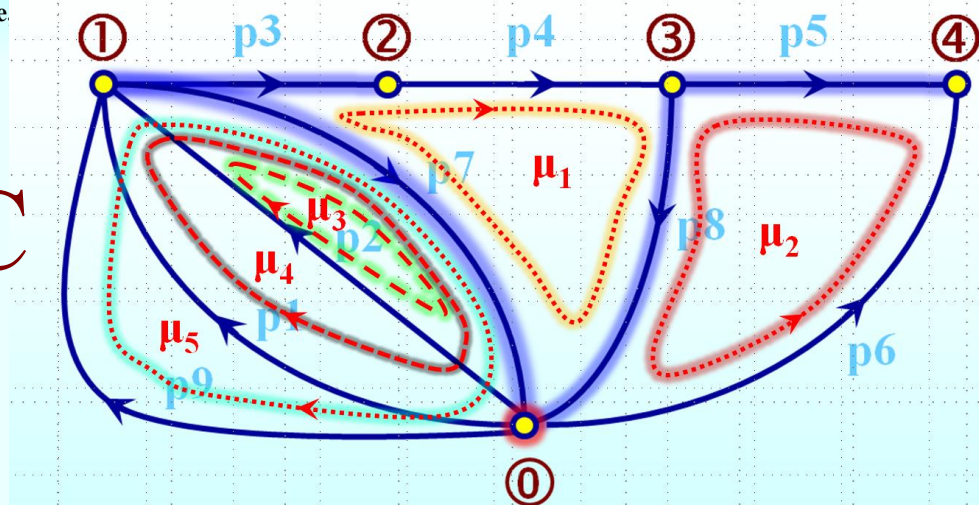
$$B_f = \begin{bmatrix} B_{fS} & B_{fKS} \end{bmatrix} \quad B_{fKS} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I_5$$

$$B_f \cdot u = 0$$

s → stablo

ks → kostablo

Струје грана, КЗС



Контурне струје : j_1, j_2, j_3, j_4, j_5

$$i_1 = j_4$$

$$i_2 = j_3$$

$$i_3 = j_1$$

$$i_4 = j_1$$

$$i_5 = -j_2$$

$$i_6 = j_2$$

$$i_7 = -j_1 + j_3 + j_4 + j_5$$

$$i_8 = j_1 + j_2$$

$$i_9 = j_5$$

$$\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \\ i_4 \\ i_5 \\ i_6 \\ i_7 \\ i_8 \\ i_9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} j_1 \\ j_2 \\ j_3 \\ j_4 \\ j_5 \end{bmatrix}$$

$$\mu_1 \rightarrow j_1$$

$$\mu_2 \rightarrow j_2$$

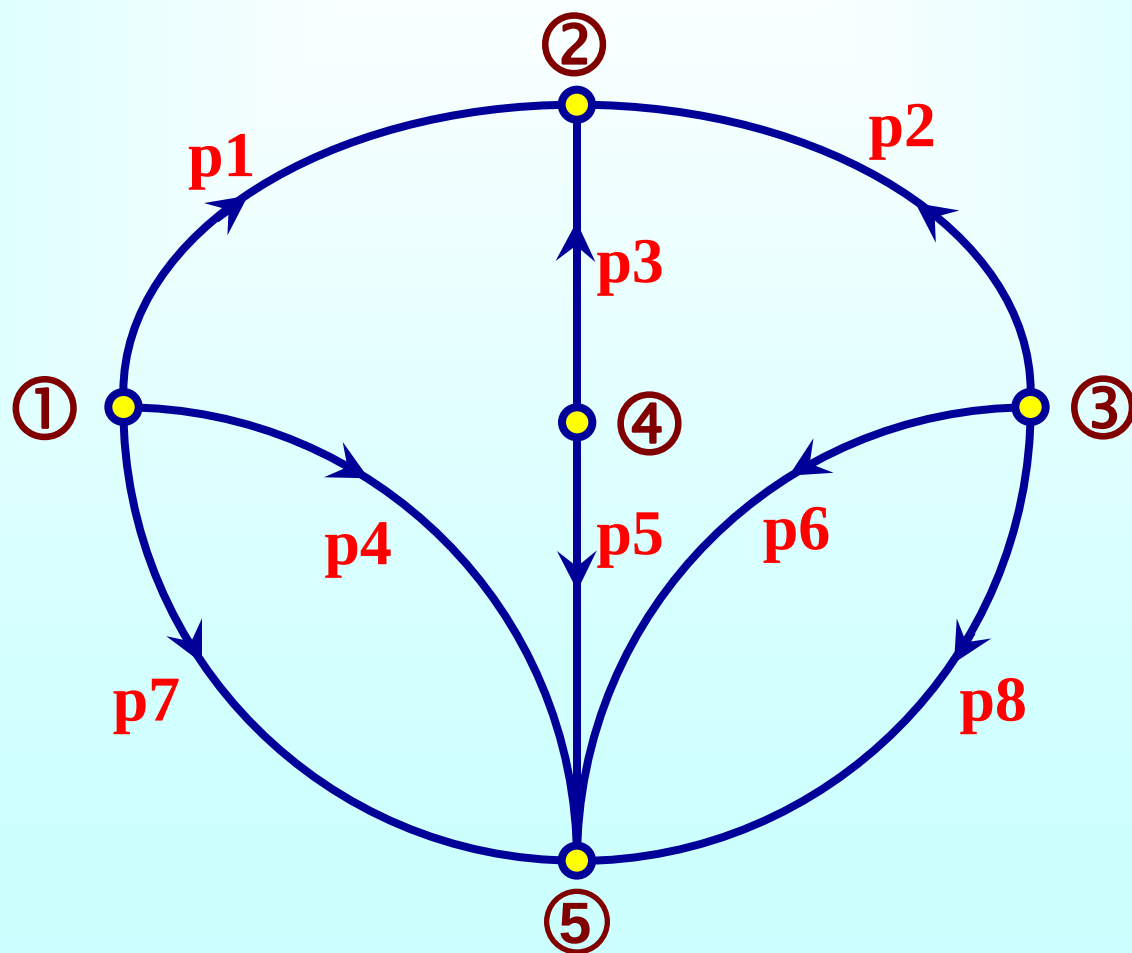
$$\mu_3 \rightarrow j_3$$

$$\mu_4 \rightarrow j_4$$

$$\mu_5 \rightarrow j_5$$

$$i = B_f^T \cdot j$$

Пример графа електричног кола

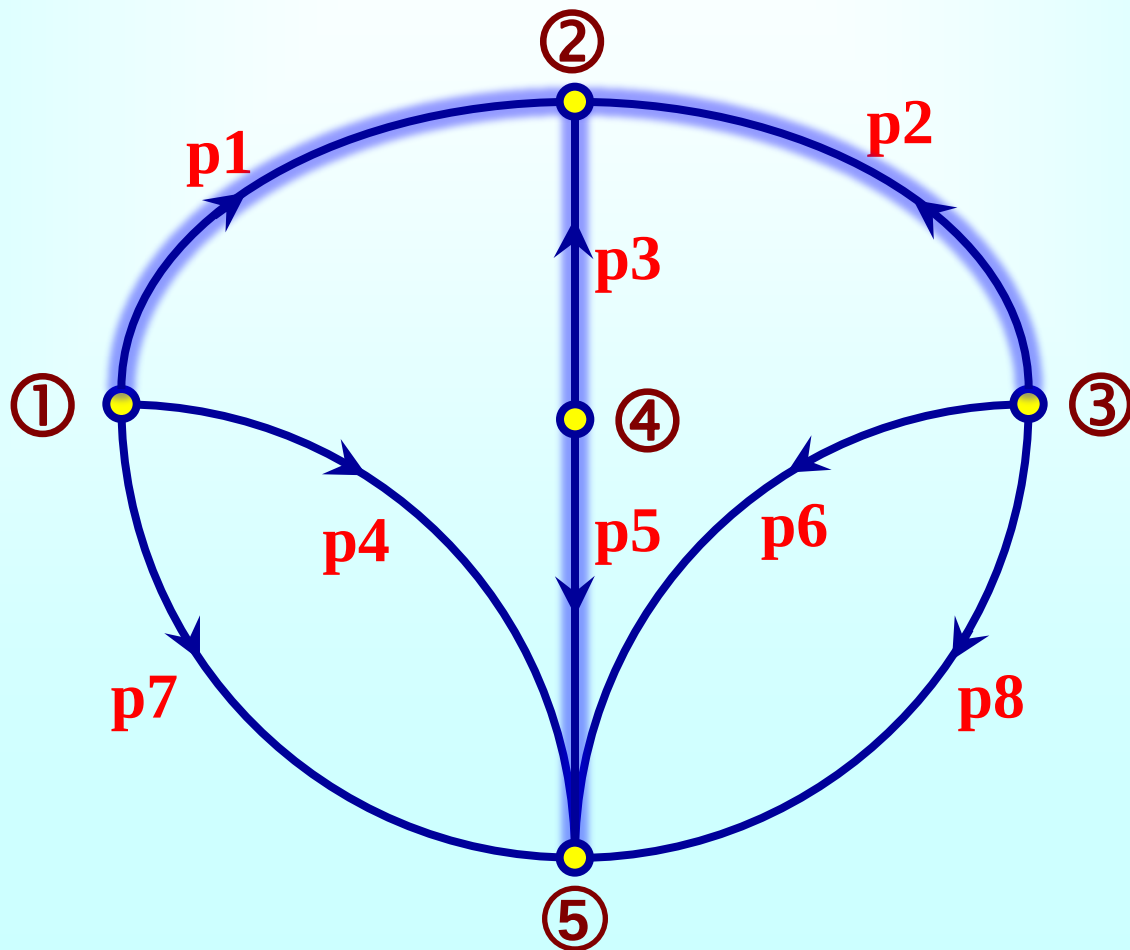


Ф-контуре, КЗС, КЗН

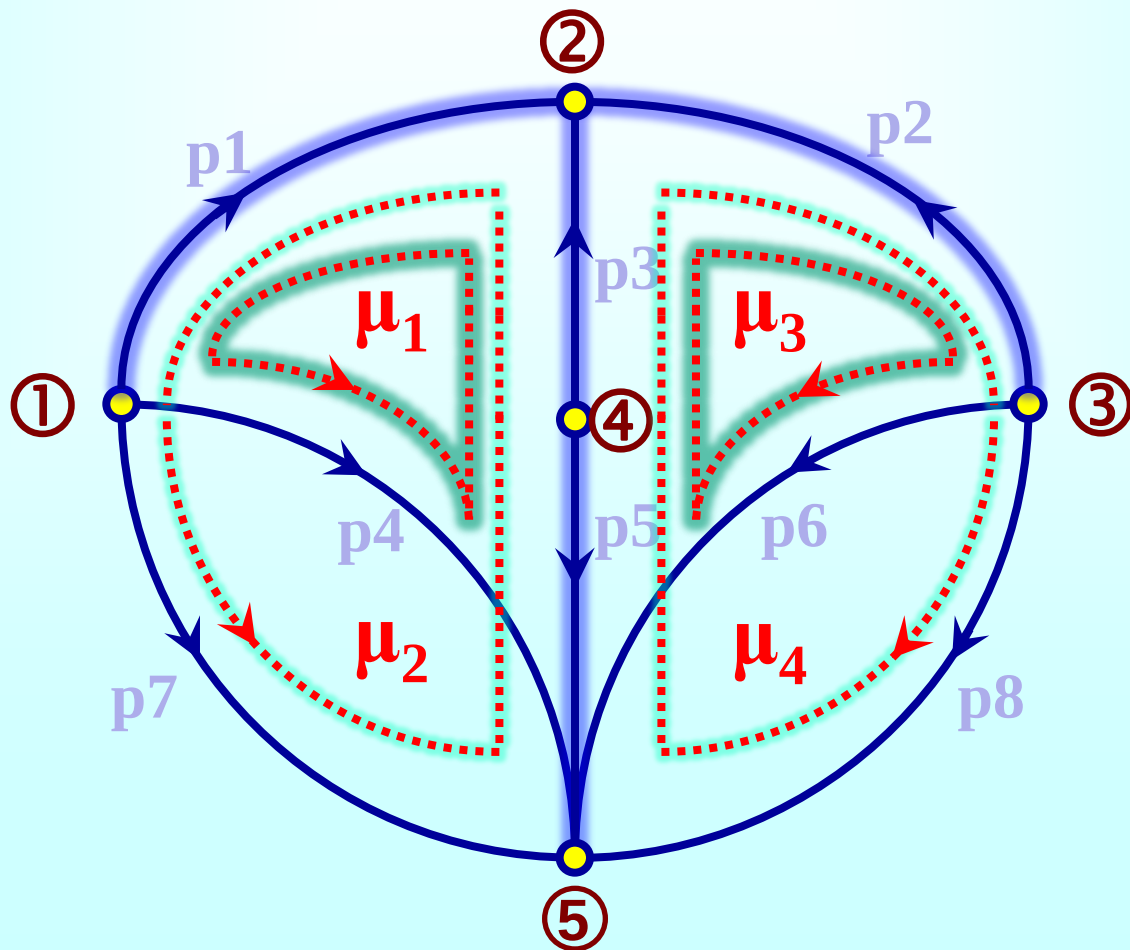
За дати граф изабрати једно стабло, а затим

- 1) Одабрати фундаменталне контуре
- 2) Написати максималан независни систем једначина **КЗН**
- 3) Проверити везу једначина **КЗС** и **КЗН** писаних према независним контурама

Стабло графа ел. кола

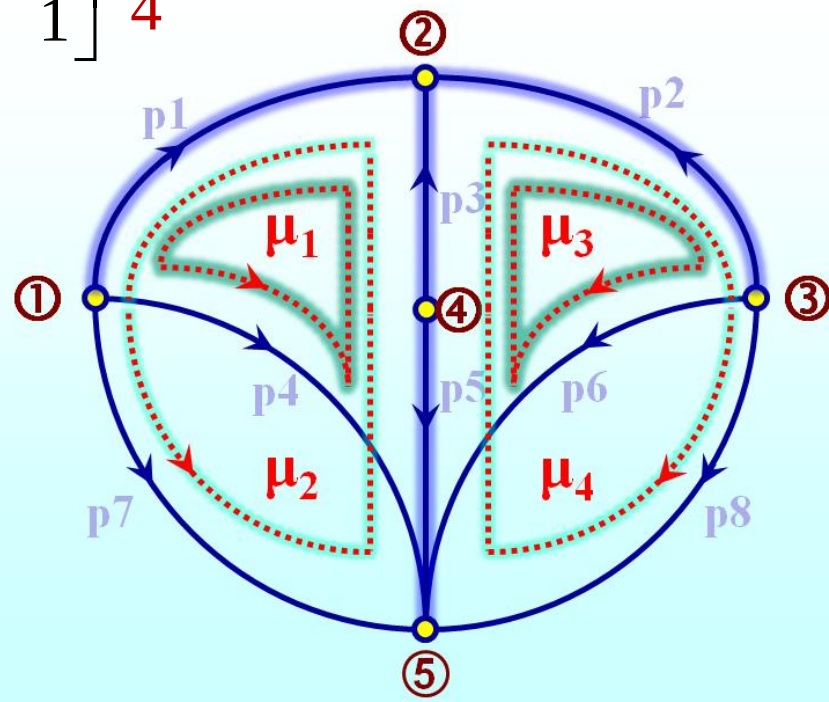


Фундаменталне контуре



Матрица фундаменталних контура

$$B_f = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix}$$



Матрица ϕ -контуре, КЗН

$$B_f = \begin{bmatrix} \overset{1}{-1} & \overset{2}{0} & \overset{3}{1} & \boxed{\overset{4}{1}} & \overset{5}{-1} & \boxed{\overset{6}{0}} & \boxed{\overset{7}{0}} & \boxed{\overset{8}{0}} \\ -1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix}$$

$$B_f = \begin{bmatrix} B_{fS} & B_{fKS} \end{bmatrix} \quad B_{fKS} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I_4$$

$$B_f \cdot u = 0$$

s $\rightarrow$ stablo

ks $\rightarrow$ kostablo

Струје грана, КЗС

Контурне струје : j_1, j_2, j_3, j_4

$$i_1 = -j_1 - j_2$$

$$i_2 = -j_3 - j_4$$

$$i_3 = j_1 + j_2 + j_3 + j_4$$

$$i_4 = j_1$$

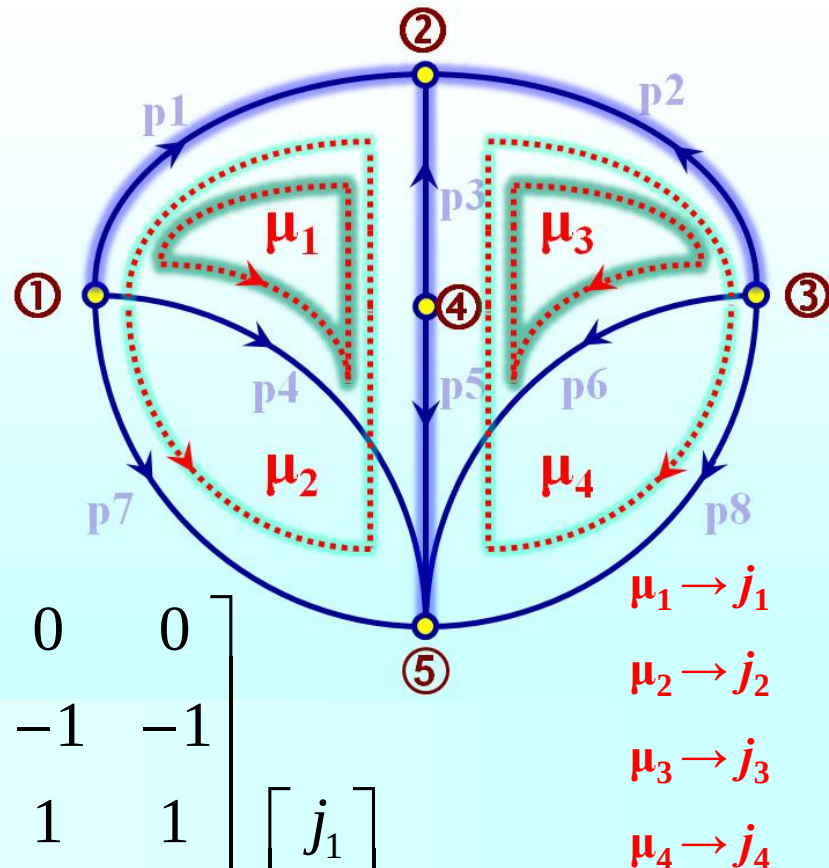
$$i_5 = -j_1 - j_2 - j_3 - j_4$$

$$i_6 = j_3$$

$$i_7 = j_2$$

$$i_8 = j_4$$

$$\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \\ i_4 \\ i_5 \\ i_6 \\ i_7 \\ i_8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} j_1 \\ j_2 \\ j_3 \\ j_4 \end{bmatrix}$$



$$i = B_f^T \cdot j$$