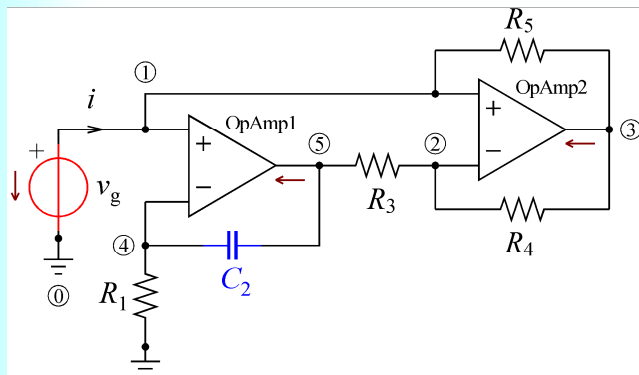


Теорија електричних кола

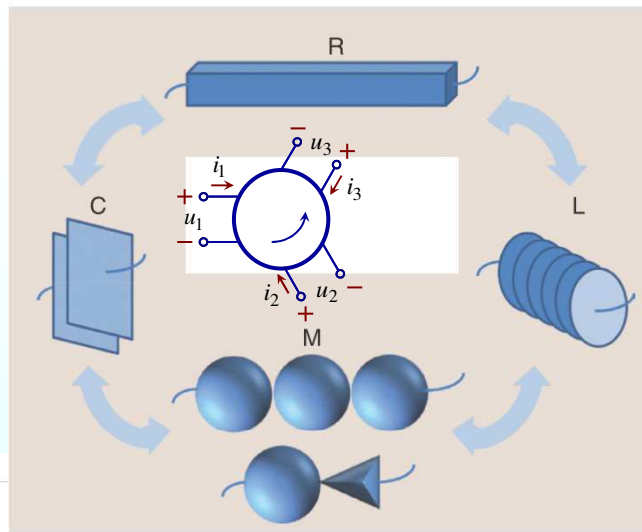


Riordan Gyrator Synthetic Inductor.wmxm

```
(%i1) load("C:\\SALECx\\SALECx.mac");
(%o1) C:\\SALECx\\SALECx.mac
```

```
(%i2) Riordan_shema: [
["V", "Vg", 1, 0, Vg],
["OpAmp", "OpAmp1", [1,4], 5],
["R", "R1", 4, 0, R1],
["C", "C2", 4, 5, C2],
["R", "R3", 5, 2, R3],
["OpAmp", "OpAmp2", [1,2], 3],
["R", "R4", 2, 3, R4],
["R", "R5", 1, 3, R5]
]
```

```
(%i3) Riordan_response: SALECx(Riordan_shema);
(Riordan_response) [ V1=Vg, V2=Vg, V3=- (R4 Vg - C2 R1 R3 Vg s) / (C2 R1 R3 s), V4=Vg, V5= (C2 R1 Vg s + Vg) / (C2 R1 s),
, I_OpAmp2= (R5 Vg + R4 Vg) / (C2 R1 R3 R5 s), I_OpAmp1= - (C2 R3 Vg s + Vg) / (C2 R1 R3 s), I_Vg= - (R4 Vg) / (C2 R1 R3 R5 s) ]
```



Користите само материјале које вам достави и препоручи предметни наставник у текућој школској години.



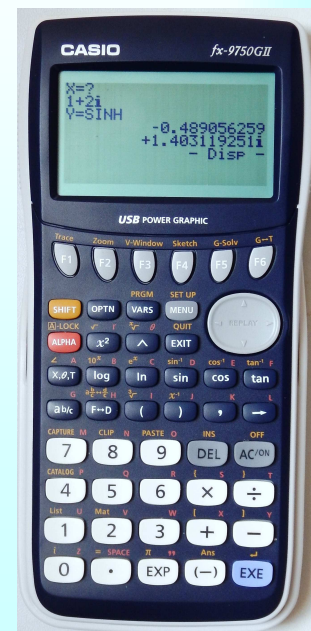
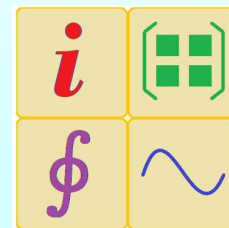
Дејан Тошић

Теорија електричних кола

- **Настава се изводи према текућем студијском програму који је Електротехнички факултет акредитовао** <http://www.etf.bg.ac.rs>
- Студијски програм: **Електротехника и рачунарство**
- Изборно подручје (модул): **Енергетика, Електроника, Физичка електроника, Сигнали и системи, Телекомуникације и информационе технологије, Рачунарска техника и информатика**
- **Циљ.** Излагање темељних знања теорије електричних кола са гледишта инжењера и истраживача електротехнике. Стварање основа за анализу модела електротехничких система и направа, електроенергетских система и погона, формулисаних посредством електричних кола. Изградња основних знања аналогне обраде сигнала помоћу електричних кола.
- **Исход.** Разумевање основних концепата и добијање увида у физичке процесе описане електричним колима. Решавање линеарних електричних кола у временском и фреквенцијском домену. Препознавање, формулисање и моделовање проблема, и проналажење инжењерских решења темељених на теорији електричних кола, у областима електротехнике и електроенергетике.
- **Садржај.** Електрични елемент, коло и мрежа. Граф кола. Основни елементи електричног кола. Диференцијално-алгебарске једначине кола и једначине стања. Конволуциони интеграл. Устаљен одзив. Фазорска трансформација. Сложенопериодичан устаљен одзив. Резонанција и резонантан одзив. Лапласова трансформација. Трофазна кола. Симетричне компоненте. Водови.
- **Наставници.** Др **Дејан Тошић**, редовни професор, соба 80; Др **Милка Потребић**, редовни професор, соба 64.
- Белешке са предавања и вежби, примери испитних задатака и питања, туторијали, <http://tek.etf.rs>
- **Начин одржавања наставе.** Сходно епидемиолошкој ситуацији и препорукама надлежних.
- **Калкулатор је дозвољен на испиту.**
- **Математички подсетник је дозвољен на испиту.**
- **Пратити званично представљање предмета и објављивање општих службених порука на адреси** <http://tek.etf.bg.ac.rs/>

Калкулатор са КОМПЛЕКСНОМ аритметиком?

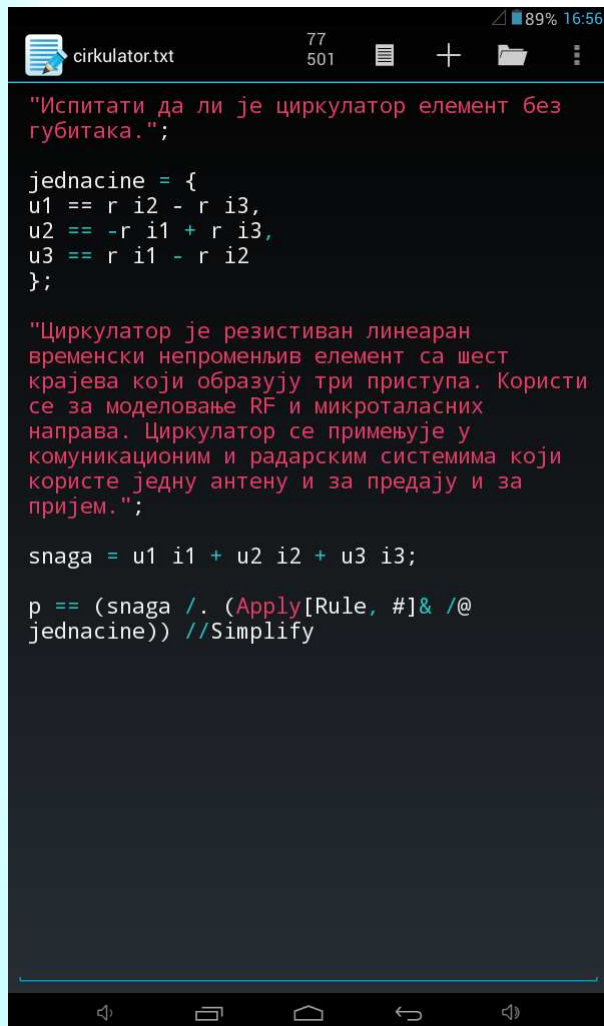
- Упознајте се са радом вашег калкулатора и његовим функцијама за **КОМПЛЕКСНУ** аритметику.
- Како бисте израчунали квадратни корен из количника два **КОМПЛЕКСНА** броја, или синус-хиперболички комплексног броја, на вашем калкулатору?
- Студенти се охрабрују да током припреме градива користе савремене софтверске алате.
- *Mathematica*, WolframAlpha, **MuPAD**, **Maxima**, **SymPy**, **SymPy Live**, **SymPy Gamma**
- **MATLAB**, **Scilab**, **Octave**, **FreeMat**, **Julia**
- LTspice, **QucsStudio**, **ngspice**, **Xyce**, **XCircuit**
- **Python**, **MathCAD**, **MAPLE**, GeoGebra, Sage
- Android apk: NCalc+, CalcES, SymJa CAS, Scientific Calculator Pro, CYZSoft Scientific Calculator Plus



Free/Libre Open Source Software (FLOSS)

Android apk

Editor 1.55



```
"Испитати да ли је циркулатор елемент без губитака.";

jednacine = {
u1 == r i2 - r i3,
u2 == -r i1 + r i3,
u3 == r i1 - r i2
};

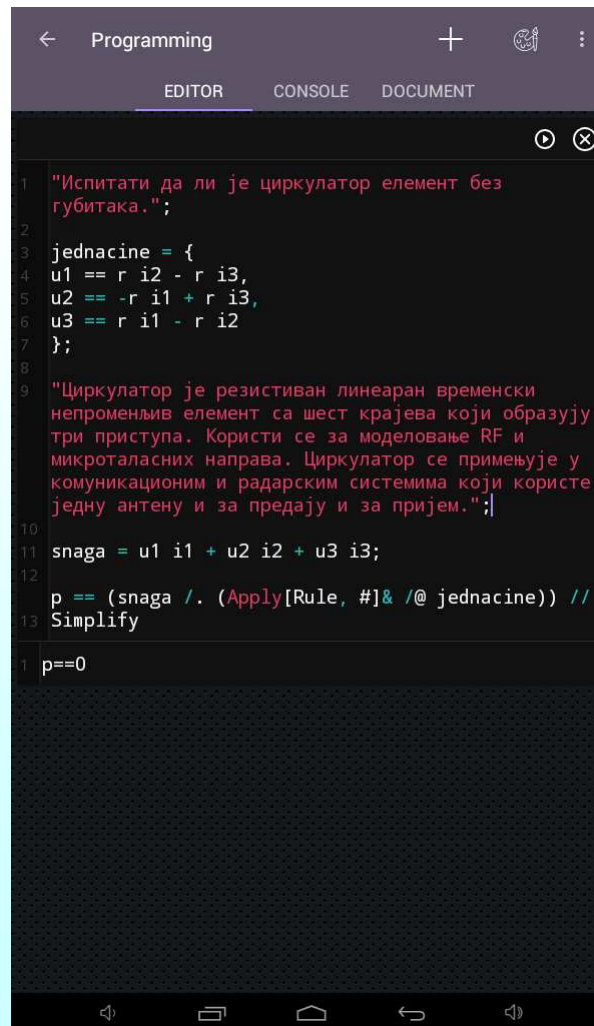
"Циркулатор је резистиван линеаран временски непроменљив елемент са шест крајева који образују три приступа. Користи се за моделовање RF и микроталасних направа. Циркулатор се примењује у комуникационим и радарским системима који користе једну антену и за предају и за пријем.";

snaga = u1 i1 + u2 i2 + u3 i3;

p == (snaga /. (Apply[Rule, #]& /@
jednacine)) //Simplify

p==0
```

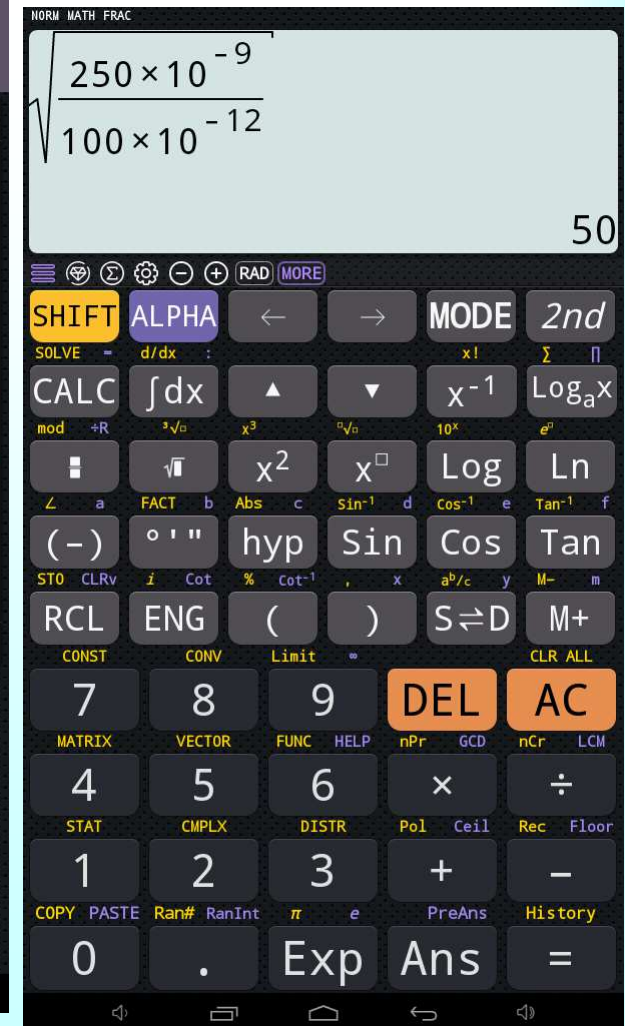
CalcES 5.2.9.702



```
← Programming + ⓘ ⋮

EDITOR CONSOLE DOCUMENT

1 "Испитати да ли је циркулатор елемент без губитака.";
2
3 jednacine = {
4 u1 == r i2 - r i3,
5 u2 == -r i1 + r i3,
6 u3 == r i1 - r i2
7 };
8
9 "Циркулатор је резистиван линеаран временски непроменљив елемент са шест крајева који образују три приступа. Користи се за моделовање RF и микроталасних направа. Циркулатор се примењује у комуникационим и радарским системима који користе једну антену и за предају и за пријем.";
10
11 snaga = u1 i1 + u2 i2 + u3 i3;
12
13 p == (snaga /. (Apply[Rule, #]& /@ jednacine)) //Simplify
14
15 p==0
```



Увод

Основни појмови

УВОД

- *Теорија електричних кола* је област Електротехнике у којој се проучавају упрошћене математичке и сликовне представе (шеме) стварних направа.
- Стварање шематске представе направа и придруживање математичких описа назива се *моделовање*, а сликовно-математичка представа се назива *модел*.
- Заменом скупа својстава предмета подкупом најважнијих од интереса за Електротехнику (*апстракцијом*) се долази до модела.

Стварне направе



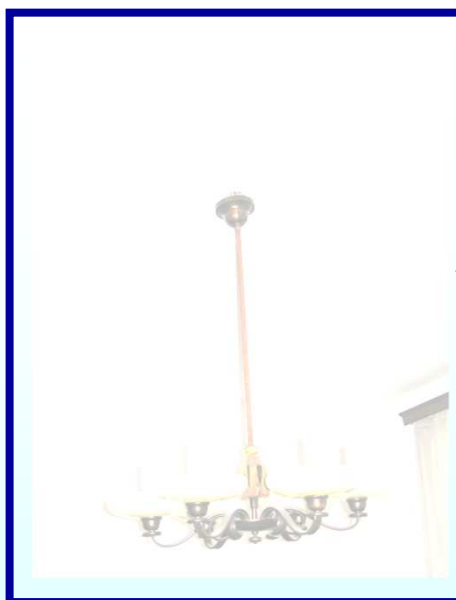
Претварање
електричне енергије
у светло



Претварање
електричне енергије
у топлоту

Извор
електричне енергије

Апстракција 3Д простора



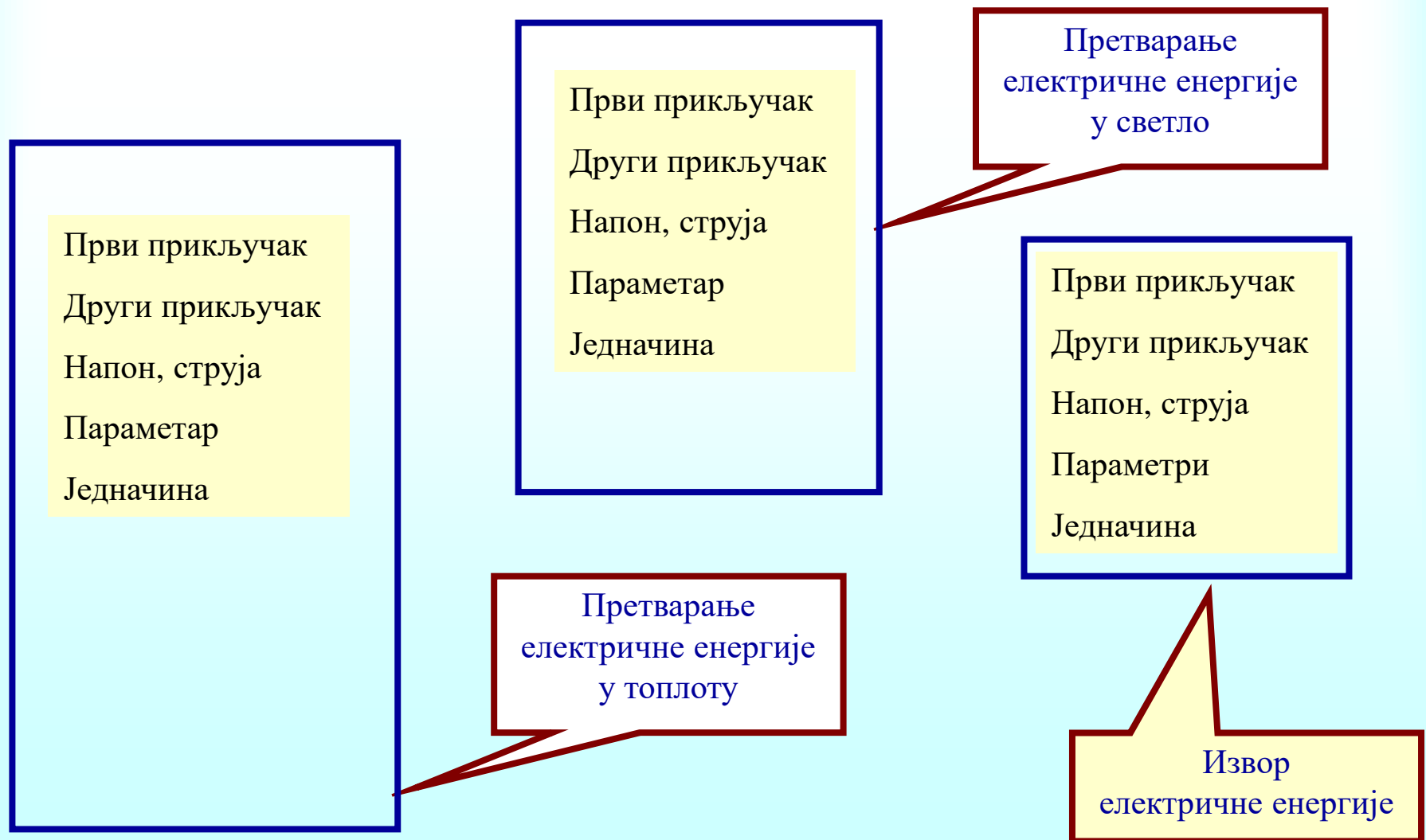
Претварање
електричне енергије
у светло



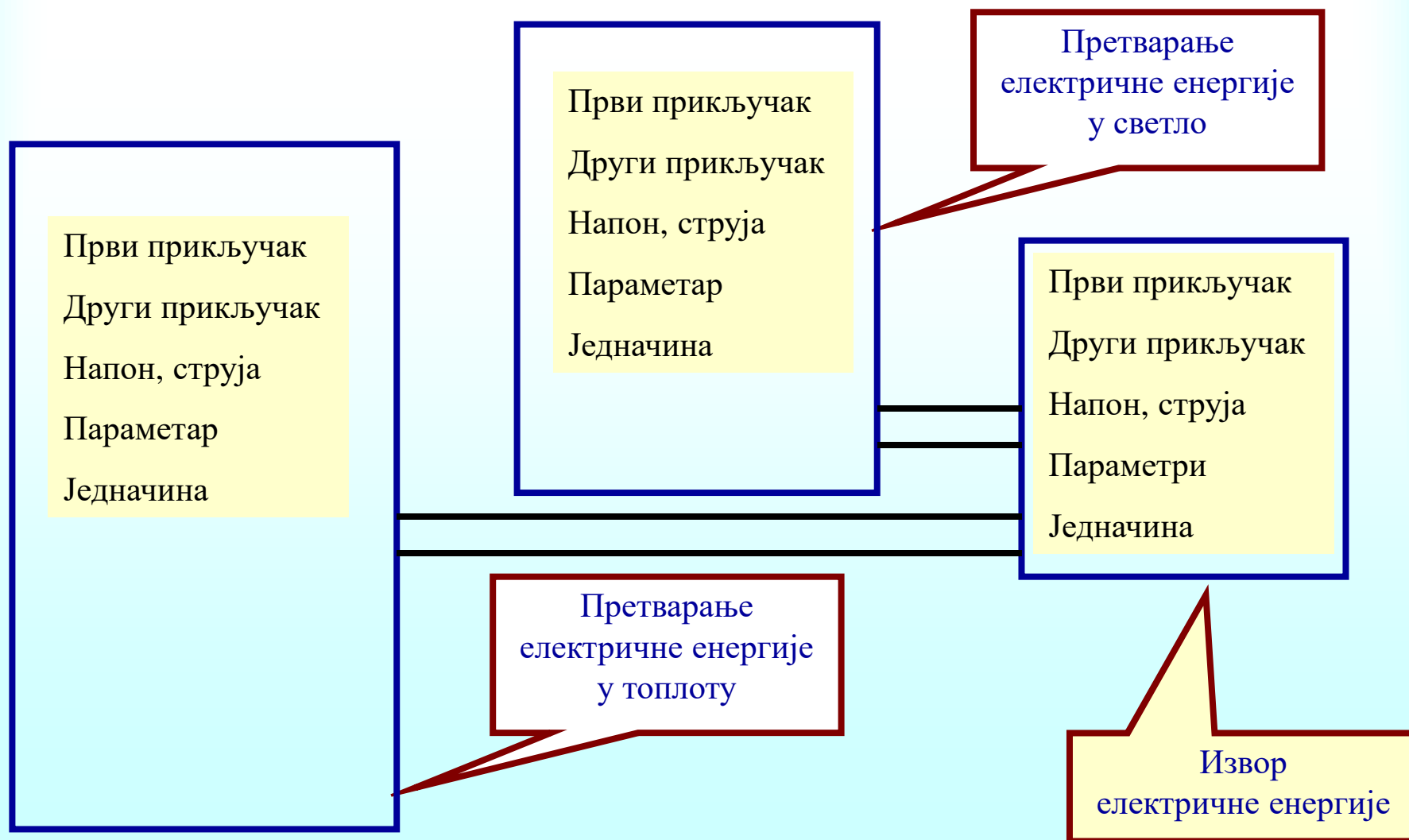
Претварање
електричне енергије
у топлоту

Извор
електричне енергије

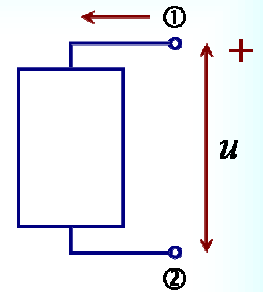
Бездимензиона својства



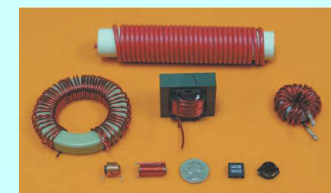
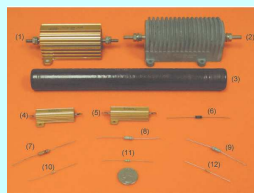
Повезаност



Елемент

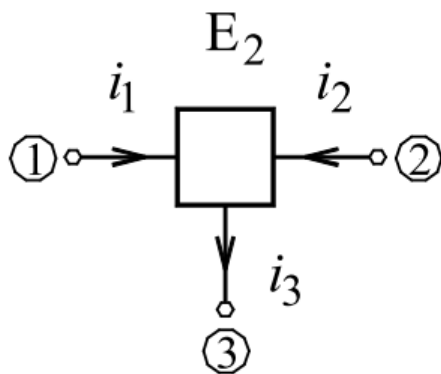
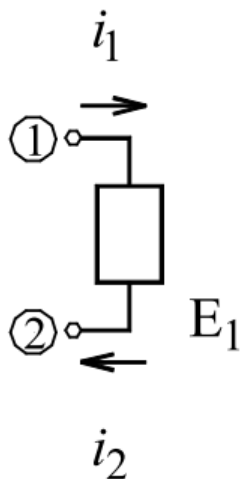


- **Елемент електричног кола** је предмет из кога су извучена два краја, или више крајева, на којима се јављају електрични напон и електрична струја.
- **Терминал** или прикључно место је крај елемента преко кога се елемент повезује са другим елементима.
- Елемент је највиши ниво апстракције стварног предмета
- **Приступ** је пар крајева елемента на којима се јавља електрични напон, а електричне струје крајева су исте јачине али супротног смера.
- Елемент са два краја има један приступ па се још назива и једноприступни или једнопортни (енглески one-port).
- Елемент пресликава најважнији физички процес, или процесе, области (простора) за коју се изводи.
- Основни, “чисти”, елементи представљају један физички процес.



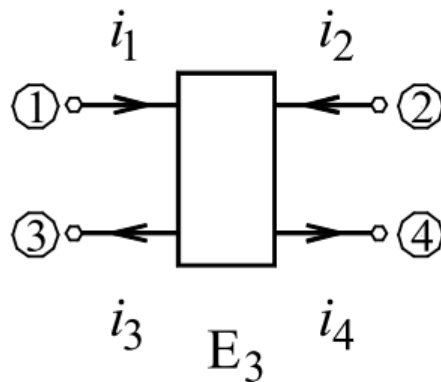
Темељна претпоставка за елемент

$$i_1 - i_2 = 0 \quad u_{n,1} + \sum_{k=1}^{n-1} u_{k,k+1} = 0$$

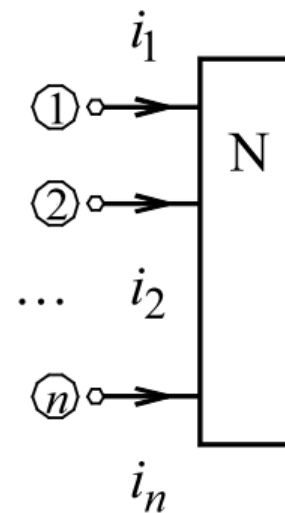


$$i_1 + i_2 - i_3 = 0$$

$$i_1 + i_2 - i_3 - i_4 = 0$$



$$\sum_{k=1}^n i_k = 0$$



Претпостављамо да је електромагнетско поље (квази) стационарно и да су напони и струје једнозначно дефинисани.

$$\oiint_S \vec{J} \, d\vec{S} = 0$$

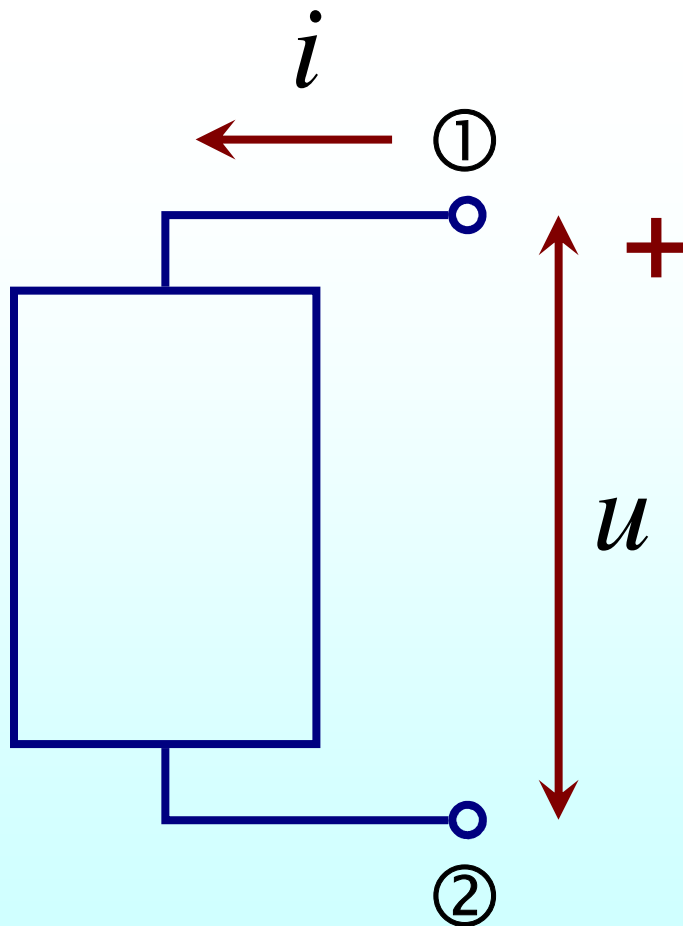
$$\oint_C \vec{E} \, d\vec{l} = 0$$

Претпоставке

$$\frac{\partial q}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0$$

- Нема нагомилавања наелектрисања **у** елементу.
- Нема промене флукса у области **ван** елемента.
- Нема кашњења у преносу наелектрисања **кроз** елемент од плус-краја до минус-краја: размера временске осе је много већа од времена простирања ЕМ таласа кроз елемент, занемарујемо време простирања ЕМ таласа.
- Елемент који задовољава претпоставке назива се **концентрисан елемент** (lumped element).

Елемент са два краја

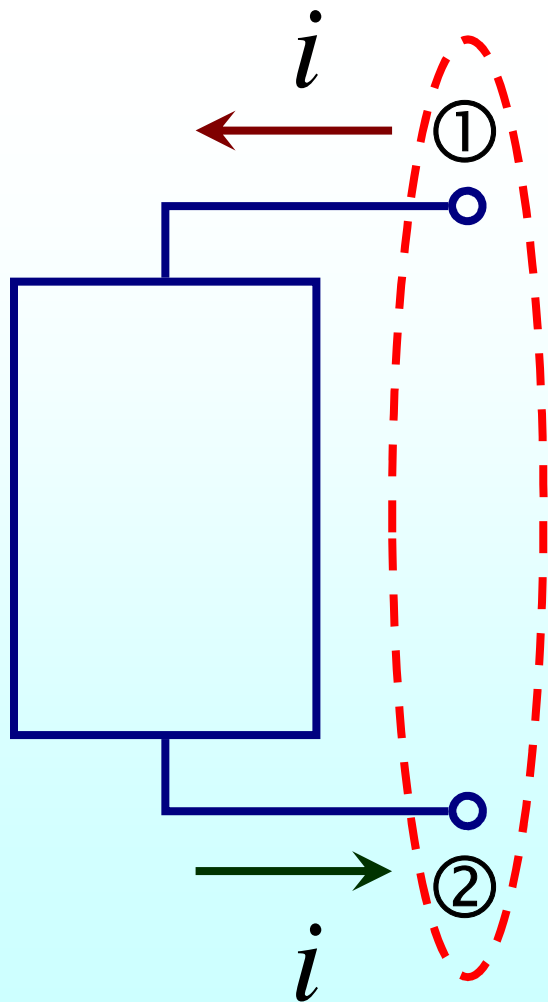


Терминале (прикључна места) обележавамо узастопним природним бројевима почев од један око којих је описан круг

Договорно, **упоредни смер** електричне струје извире из плус краја упоредног смера за електрични напон

associated reference convention, passive sign convention

Елемент са једним приступом

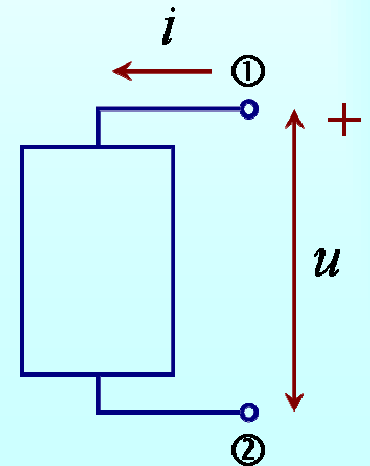


Приступ је
пар крајева.

Електричне струје крајева
приступа су исте јачине али
супротног смера.

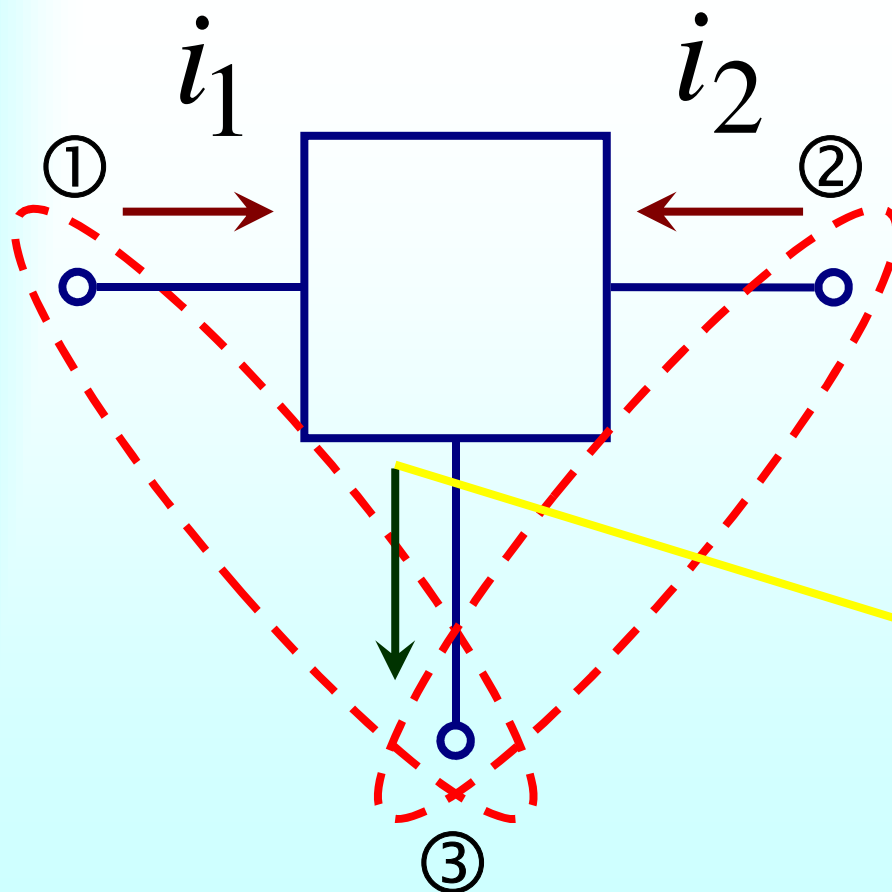
Упоредни (референтни) смер

- Електричне напоне и струје тумачимо према договореним смеровима који се, ако се друкчије не каже, надовезују.
- Надовезујуће смерове обично зовемо **стандардни референтни смерови**, усаглашени смерови, придружени смерови, или усклађени смерови.



associated reference convention, passive sign convention

Елемент са три краја

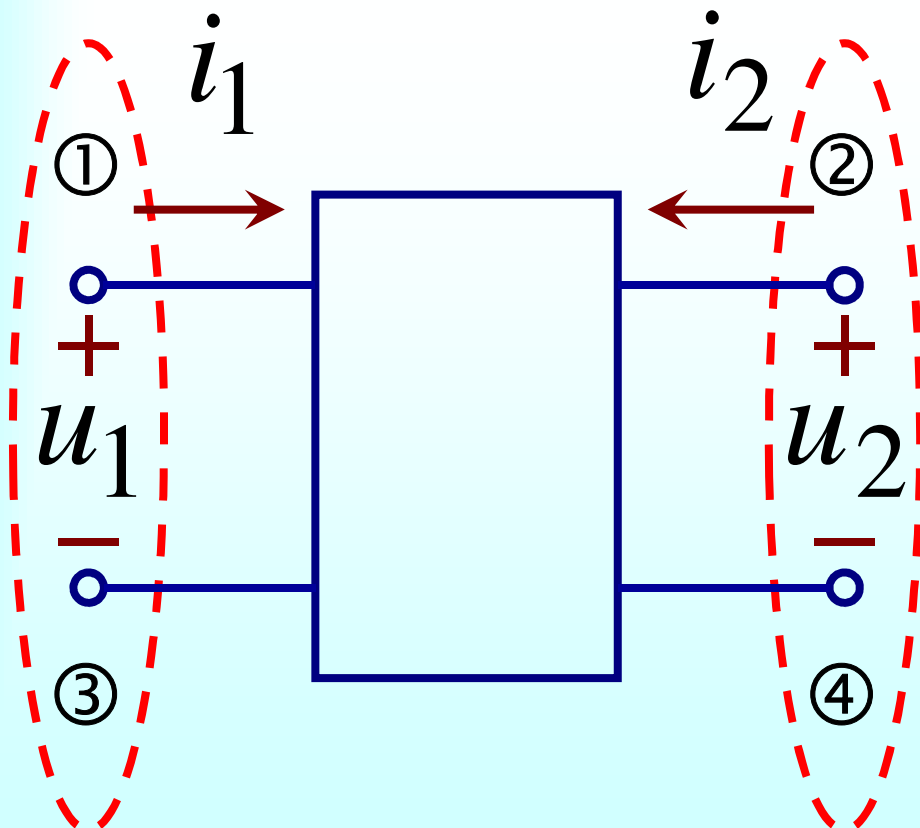


Први приступ чине крајеви 1 и 3.

Други приступ чине крајеви 2 и 3.

$$i_1 + i_2$$

Елемент са четири краја



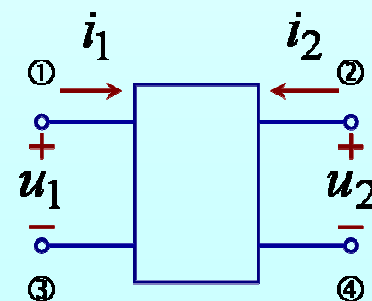
Први приступ чине крајеви 1 и 3.

Други приступ чине крајеви 2 и 4.

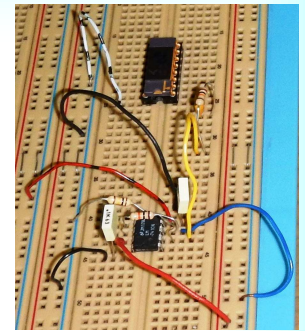
Смерови за ел. напоне су стандардни (усаглашени).

Примар, Секундар, Улаз, Излаз

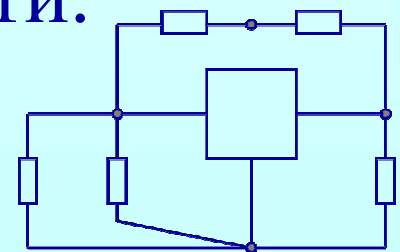
- Приступи елемента са четири краја се обично именују као
- први приступ, **Примар**, Улаз (*input*),
- други приступ, **Секундар**, Излаз (*output*).
- Ако су крајеви 3 и 4 спојени, елемент се назива уземљен (grounded) и своди се на елемент са три краја.



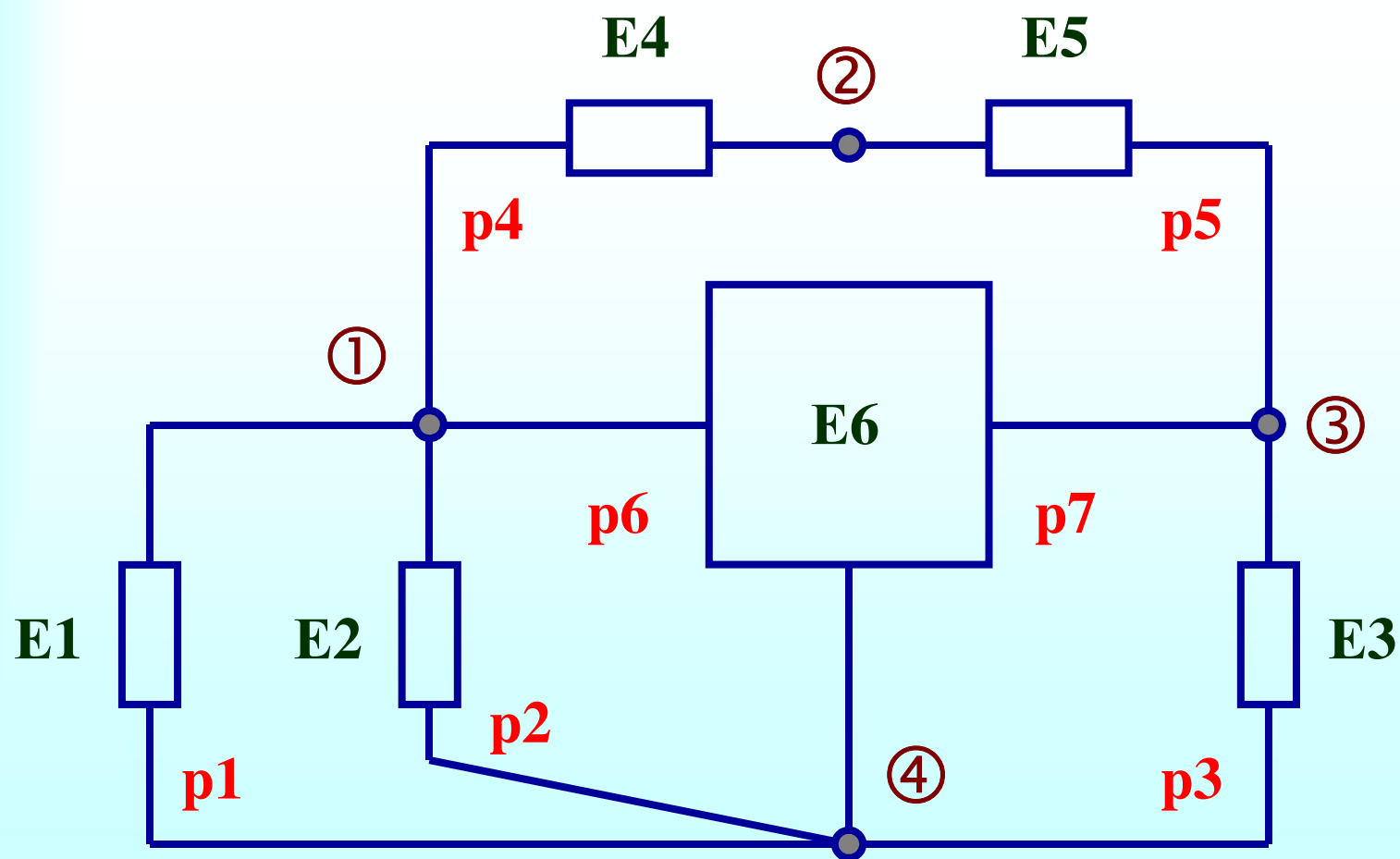
Електрично коло



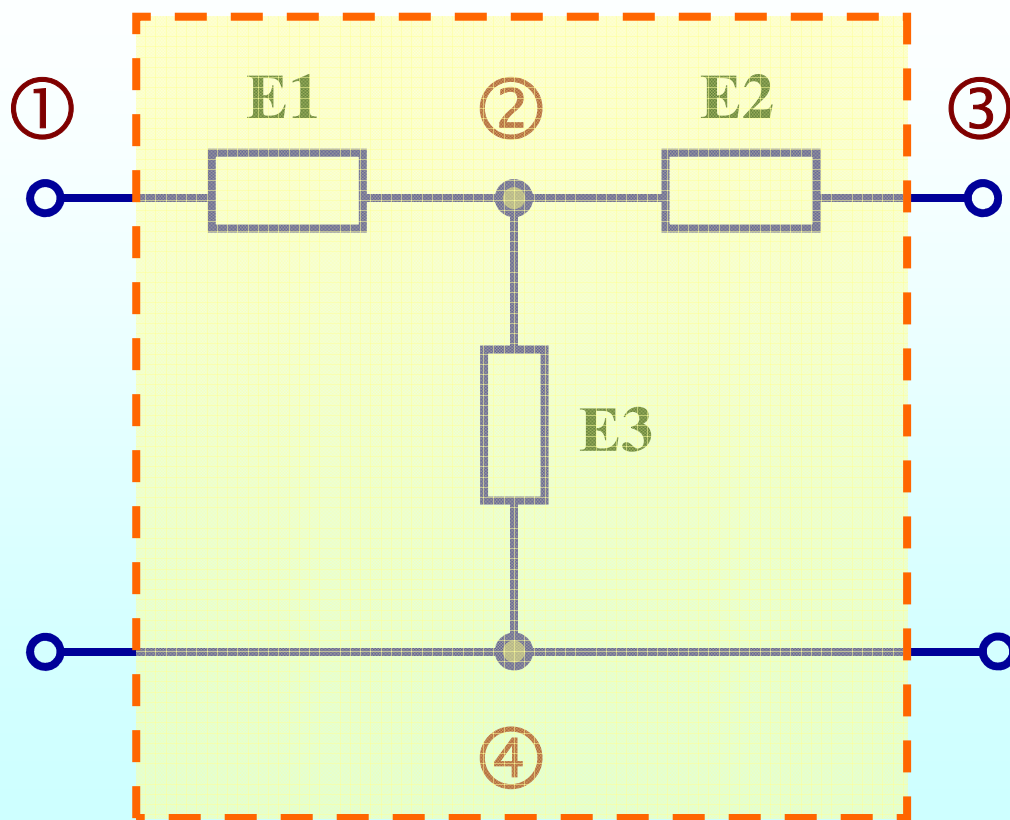
- **Електрично коло** је састав елемената који су повезани спајањем терминала (прикључних места) елемената.
- **Чвор** електричног кола је место споја терминала елемената.
- **Електрична мрежа** је електрично коло из кога су извучени крајеви преко којих се могу прикључити други елементи.



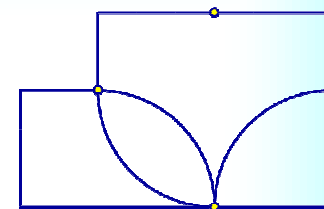
Пример електричног кола



Пример електричне мреже

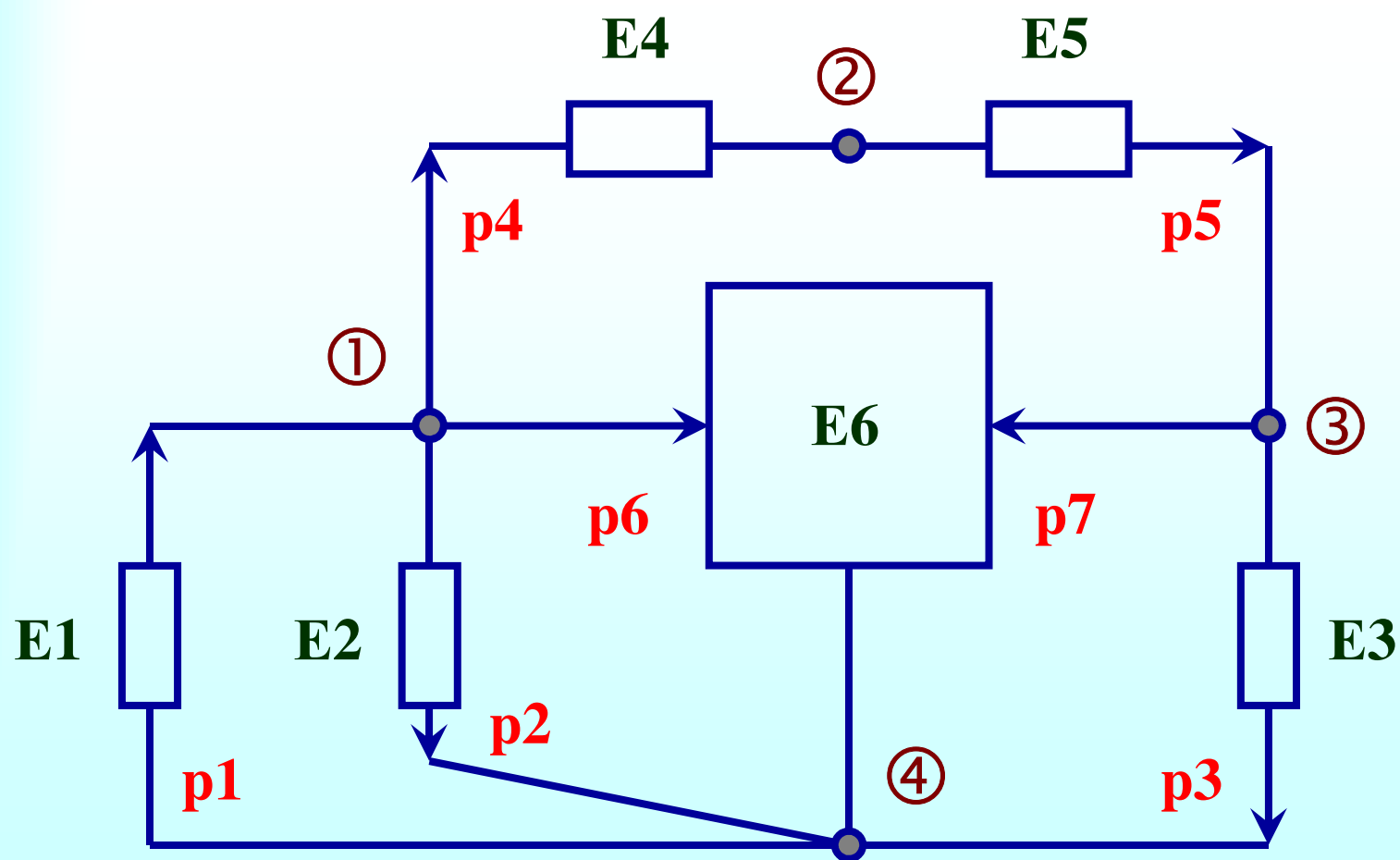


Граф електричног кола

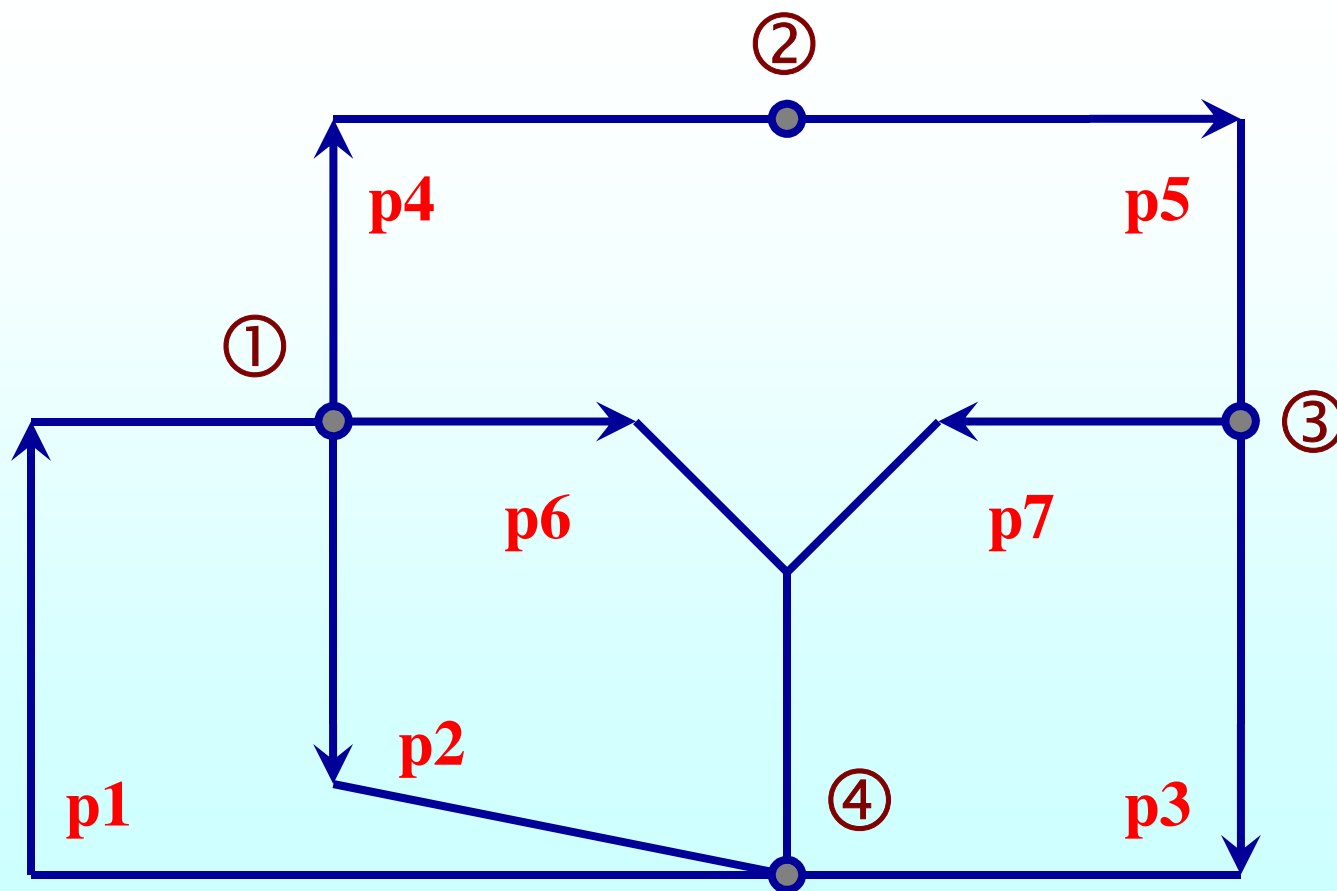


- Упрошћена сликовна представа електричног кола у којој се сваки приступ ел. кола представља линијом, а сваки чвор ел. кола кружићем, назива се **граф** ел. кола.
- Ако су усвојени смерови ел. струја, линије које представљају приступе ел. кола ће бити усмерене и такав граф се зове **усмерен граф** или диграф.
- **Грана** графа ел. кола је линија (дуж или лук) којом се представља приступ ел. кола у графу ел. кола
- **Чвор** графа ел. кола једнозначно одговара чвору ел. кола .
- Смер гране графа ел. кола је једнак смеру ел. струје одговарајућег приступа ел. кола.
- Смер ел. напона је стандардан – **усаглашен** са смером ел. струје.
- Гране и чворови се, договорно, обележавају узастопним природним бројевима почев од **један**. Чворови, некада, почев од **0**.

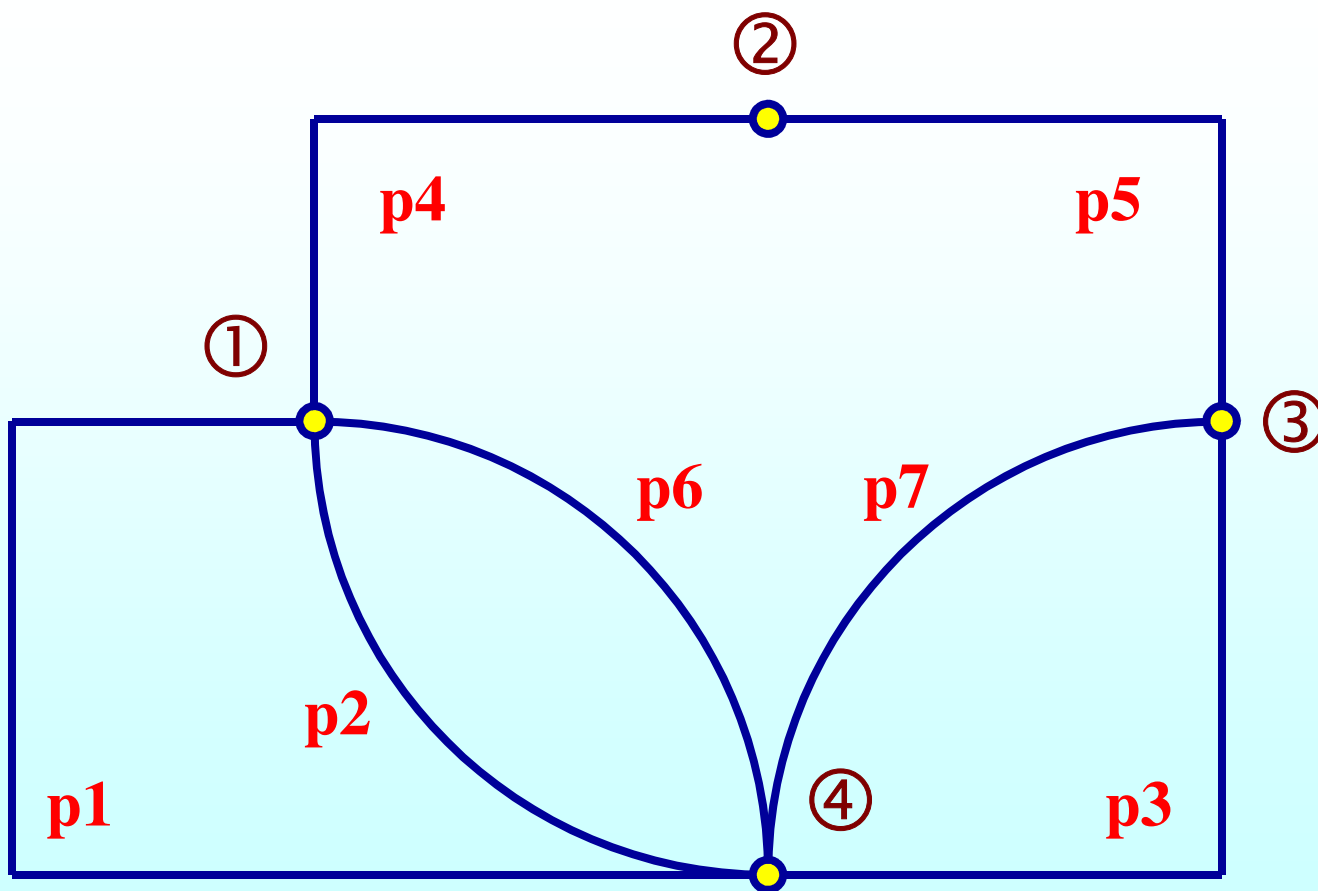
Пример графа ел. кола (1)



Пример графа ел. кола (2)



Пример графа ел. кола (3)



Општа дефиниција графа

За дефиницију графа није неопходна сликовна представа и он се може дефинисати као уређени пар скупова $G = (V, P)$ где је G ознака графа, $V = \{v_1, v_2, \dots, v_c\}$ је непразан скуп чворова, c је број чворова, $P = \{p_1, p_2, \dots, p_b\}$ је скуп грана, а b је број грана. Свакој грани $p_l \in P$ се једнозначно придружује уређени пар чворова (v_j, v_k) , $v_j \in V$, $v_k \in V$, што се обележава са $p_l \mapsto (v_j, v_k)$. Једнозначно пресликавање грана у парове чворова назива се функција инциденције. Потпунија дефиниција графа је уређена тројка $G = (V, P, F_G)$ у којој је непосредно (експлицитно) наведена и функција инциденције F_G .

Ако је $p_l \mapsto (v_j, v_k)$ каже се да су чворови v_j и v_k **суседни**, да припадају грани p_l , да их та грана спаја, да су крајње тачке гране p_l , да је та грана инцидентна на њих и да су они инцидентни на грану p_l . Чвор v_j је почетни чвор гране p_l а чвор v_k је њен крајњи чвор гране. Грана p_l је усмерена од чвора v_j ка чвору v_k .

Пут, петља

Гране које су инцидентне на исти пар чворова називају се **паралелне гране**. Гране које су инцидентне на бар један чвор су **суседне**. Паралелне гране су истовремено и суседне.

Степен чвора је број грана које су спојене (инцидентне) на чвор. Улазни степен чвора је број грана које су спојене на чвор и усмерене ка чвору. Излазни степен чвора је број грана које су спојене на чвор и усмерене од чвора.

Чвор је изолован ако је његов степен 0. Чвор је висећи ако је његов степен 1.

Грана је изолована ако је степен чворова који јој припадају 1. Грана је висећа ако је степен бар једног од чворова који јој припадају 1.

Пут је низ различитих чворова и грана $v_1, p_1, \dots, v_l, p_l, v_{l+1}, \dots, v_n, p_n, v_{n+1}$ такав да грани p_l припадају чворови v_l и v_{l+1} . Дужина пута је једнака броју грана. Чвор v_1 је почетни чвор пута а чвор v_{n+1} је крајњи чвор пута. Пут је усмерен од чвора v_1 ка чвору v_2 . Каже се да пут спаја чворове v_1 и v_{n+1} .

Петља (контура) је низ различитих чворова и грана $v_1, p_1, \dots, v_l, p_l, v_{l+1}, \dots, v_n, p_n, v_1$ такав да грани p_l припадају чворови v_l и v_{l+1} а грани p_n чворови v_n и v_1 . Дужина петље је једнака броју грана. Петља је усмерен од чвора v_1 ка чвору v_2 преко гране p_1 .

Подграф, стабло, спојница

Петља дужине 2 је низ v_1, p_1, v_2, p_2, v_1 и њен смер је од чвора v_1 ка чвору v_2 преко гране p_1 . Гране p_1 и p_2 су паралелне.

Петља дужине 1 се назива **сопствена петља** (енглески: self loop, loop) је низ v_1, p_1, v_1 и њен смер је смер гране p_1 . Настаје пресликавањем електричног приступа чији су крајеви спојени на исти електрични чвор. Сопствена петља је грана графа $p_l \mapsto (v_j, v_j)$.

Окце је петља планарног графа која не обухвата ни једну грану.

Граф је **повезан** ако постоји пут између било која два његова чвора. У противном, граф је неповезан и састоји се од делова (компоненти) који су понаособ повезани.

Подграф (субграф) графа $G = (V, P)$ је граф $G' = (V', P')$ такав да је $V' \subseteq V$ и $P' \subseteq P$, при чему V' садржи све чворове који припадају гранама из P' .

Стабло је повезани подграф без петљи који садржи све чворове. **Костабло** (комплемент стабла) чине гране ван стабла и њихови чворови. Гране костабла се називају **спојнице**. Граф може имати више стабала.

У општој теорији графова стабло (енглески: tree) је повезан граф без петљи. Стабло које је подграф повезаног графа, који садржи све чворове графа и нема петљи, назива се разаципиуће стабло (енглески: spanning tree).

Пресек, сноп, чворни пресек

Пресек повезаног графа $G = (V, P)$ је уређен пар два непразна дисјунктна подскупа чворова $S = (V_1, V_2)$ таква да је $V_1 \cup V_2 = V$. **Сноп** је скуп грана чији је један чвор у скупу V_1 а други у скупу V_2 . Ако сноп садржи само једну грану, та грана се назива мост (енглески: bridge). У случају планарних графова пресек се означава испрекиданом линијом која сече гране снопа. Пресек је усмерен од V_1 до V_2 . Граф може имати више пресека. Број различитих пресека повезаног графа је $2^c - 2$, где је c број чворова. Ако се гране снопа уклоне, добија се неповезан граф, а ако се врати било која од уклоњених грана настаје повезан граф.

Чворни пресек повезаног графа $G = (V, P)$ је уређен пар подскупова чворова $S = (\{v_j\}, V \setminus \{v_j\})$, $v_j \in V$. Обрнута коса црта $\setminus$ означава разлику (диференцију) скупова. **Чворни сноп** је скуп грана везаних за чвор. Смер пресека је од чвора v_j . Ако се гране снопа уклоне, чвор v_j постаје изолован.

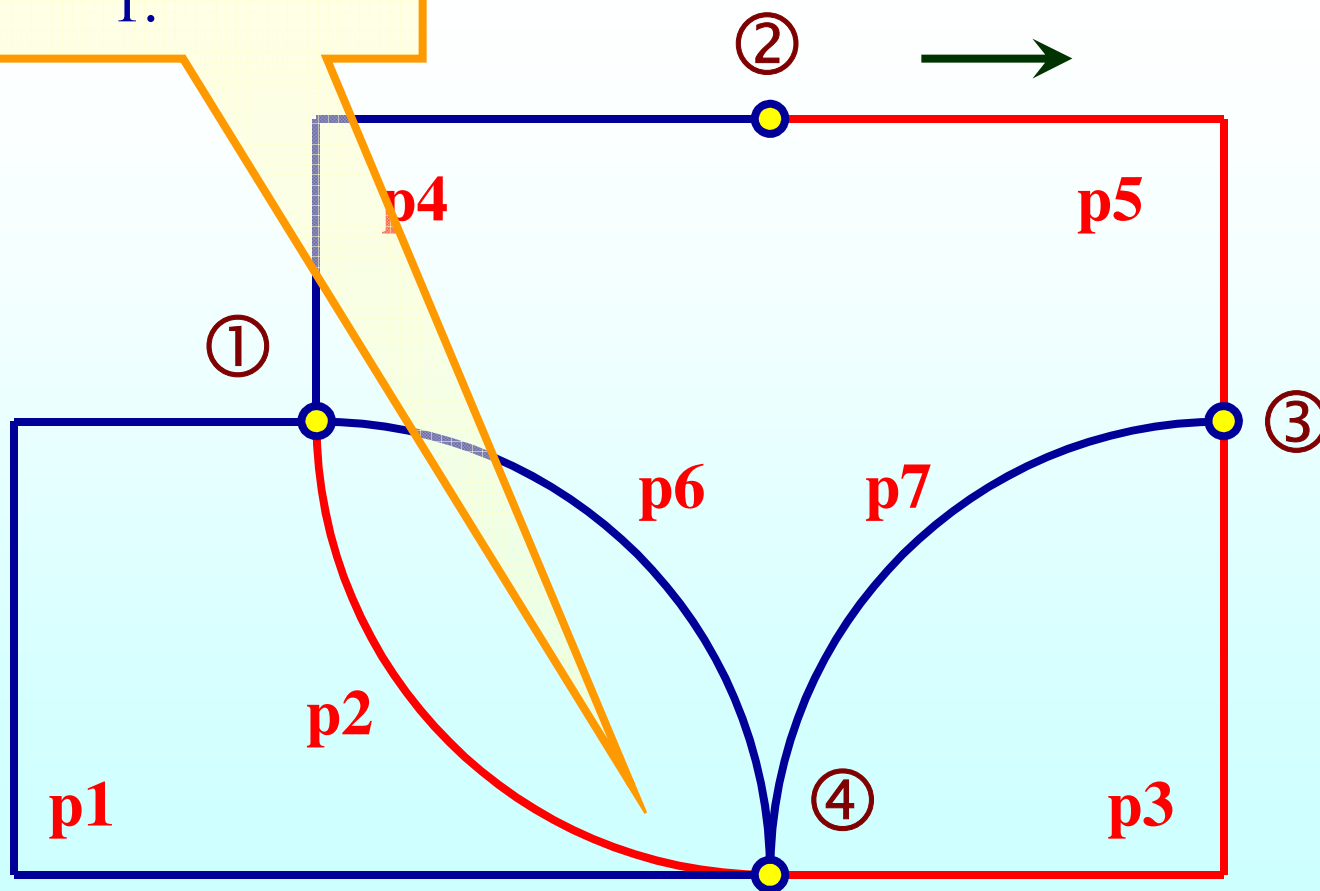
Главни пресек, сноп петља

Главни пресек (фундаментални пресек) је пресек који настаје из стабла графа када се уклони једна грана и добију два неповезана дела стабла; чворови појединих делова чине скупове чворова пресека. **Главни сноп** је сноп који одговара главном пресеку. Свакој грани стабла одговара један главни пресек и један главни сноп. Смер пресека је једнак смеру гране стабла од кога је пресек настао. За дато стабло, сваки од главних снопова садржи тачно једну грану која се појављује само у њему, а то је грана стабла којој одговара главни сноп. Број главних пресека једнак је броју главних снопова и једнак је броју грана стабла $n = c - 1$, где је c број чворова.

Главна петља (фундаментална контура) је петља која настаје из стабла додавањем једне спојнице. Смер петље је једнак смеру спојнице. За дато стабло, свака од главних петљи садржи тачно једну грану која се појављује само у њој, а то је спојница којој одговара главна петља. Број главних петљи је једнак броју спојница.

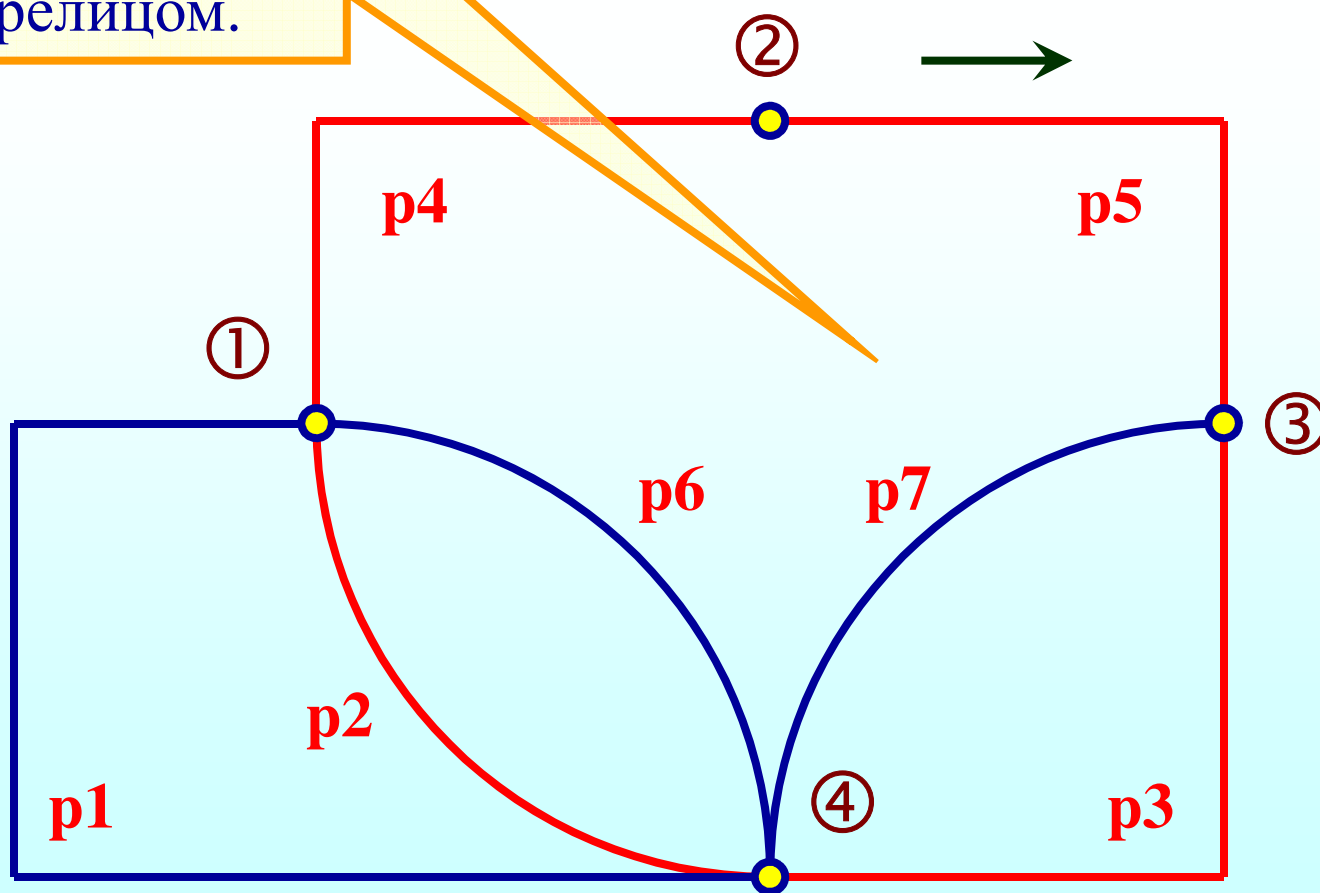
Гране 2, 3 и 5 чине
пут између чворова
1 и 2. Смер пута је
од чвора 2 ка чвору
1.

Пример пута

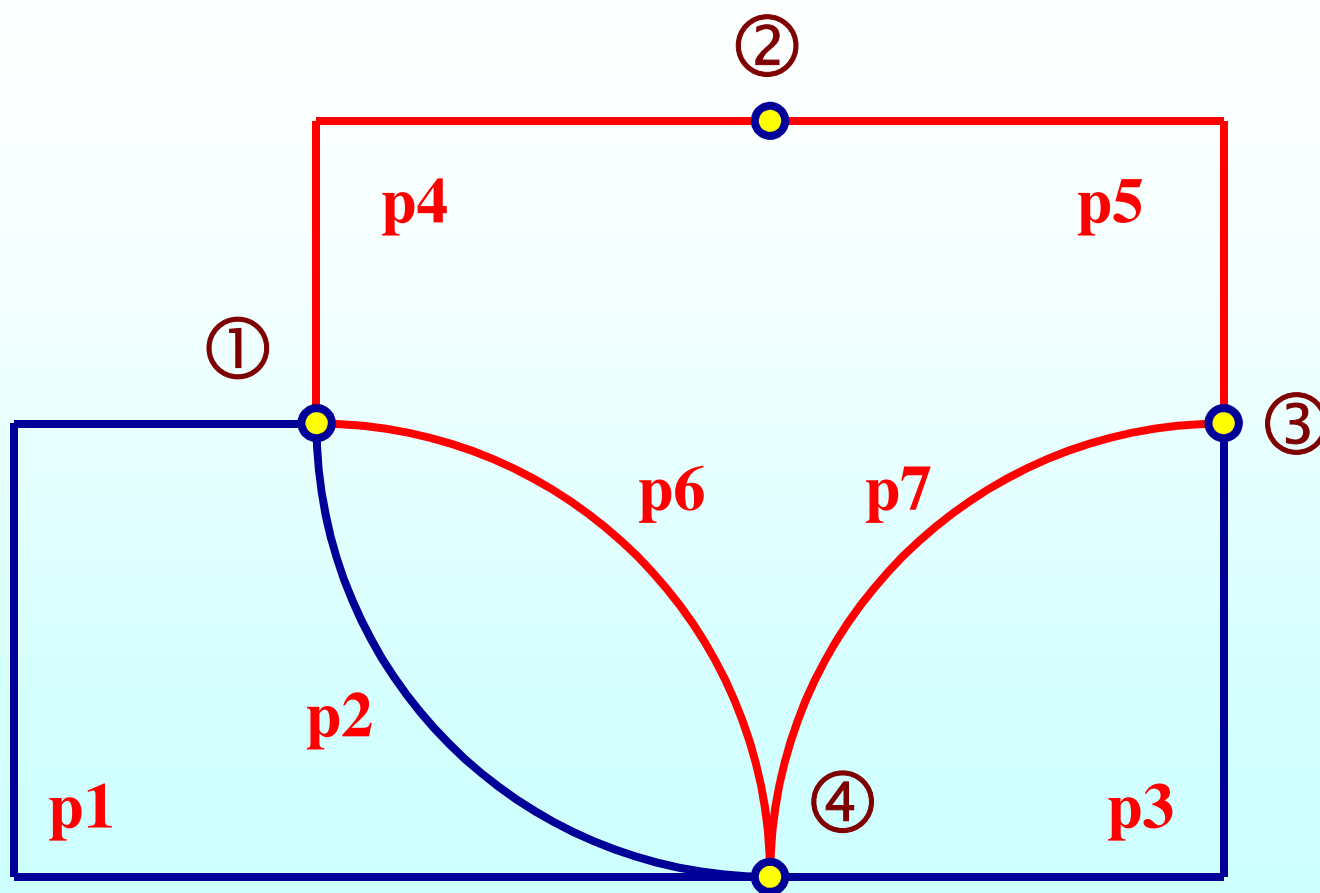


Гране 2, 3, 5 и 4
чине контуру.
Смер контуре је
означен
стрелицом.

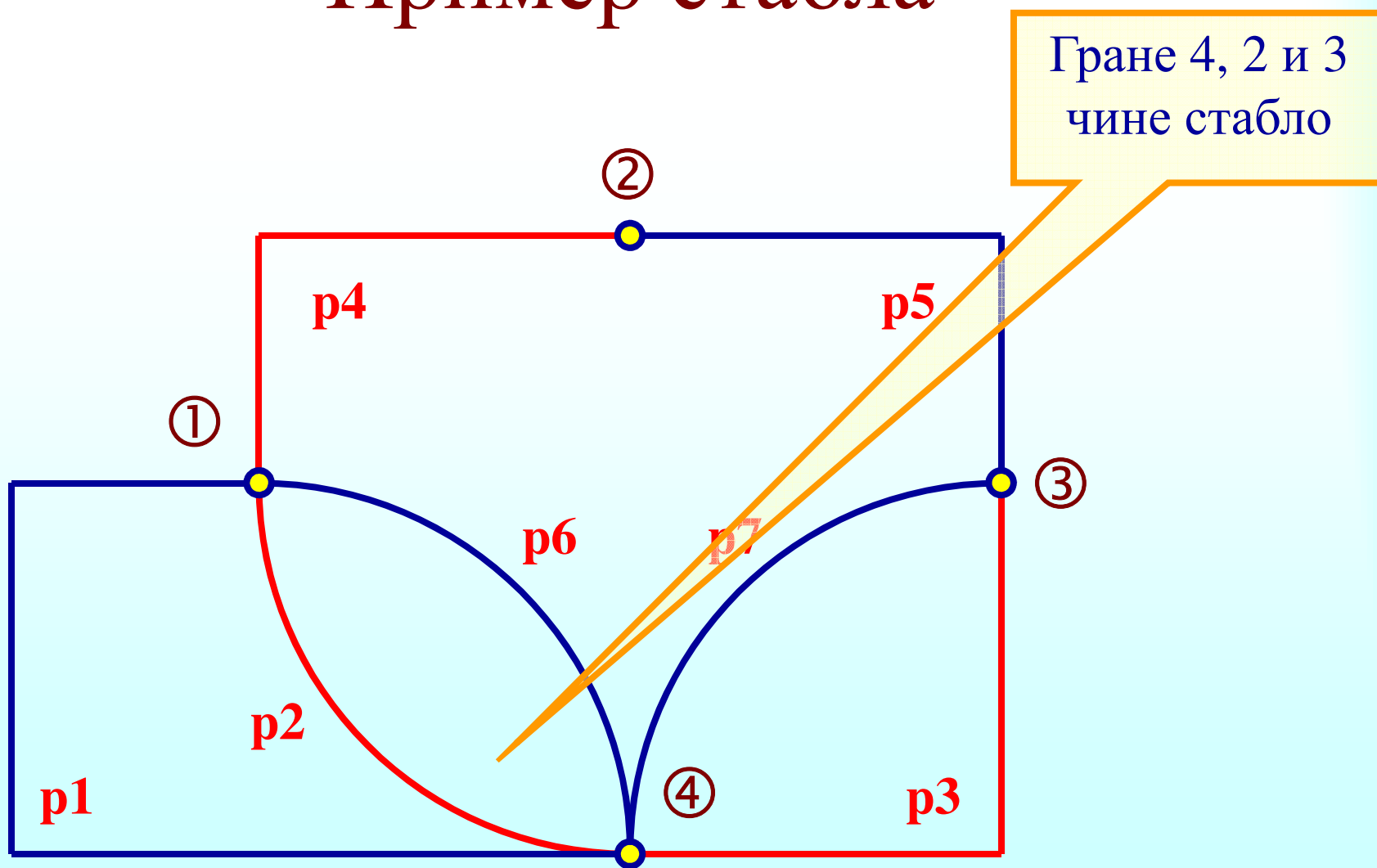
Пример контуре



Окце или елементарна контура: контура која не обухвата гране



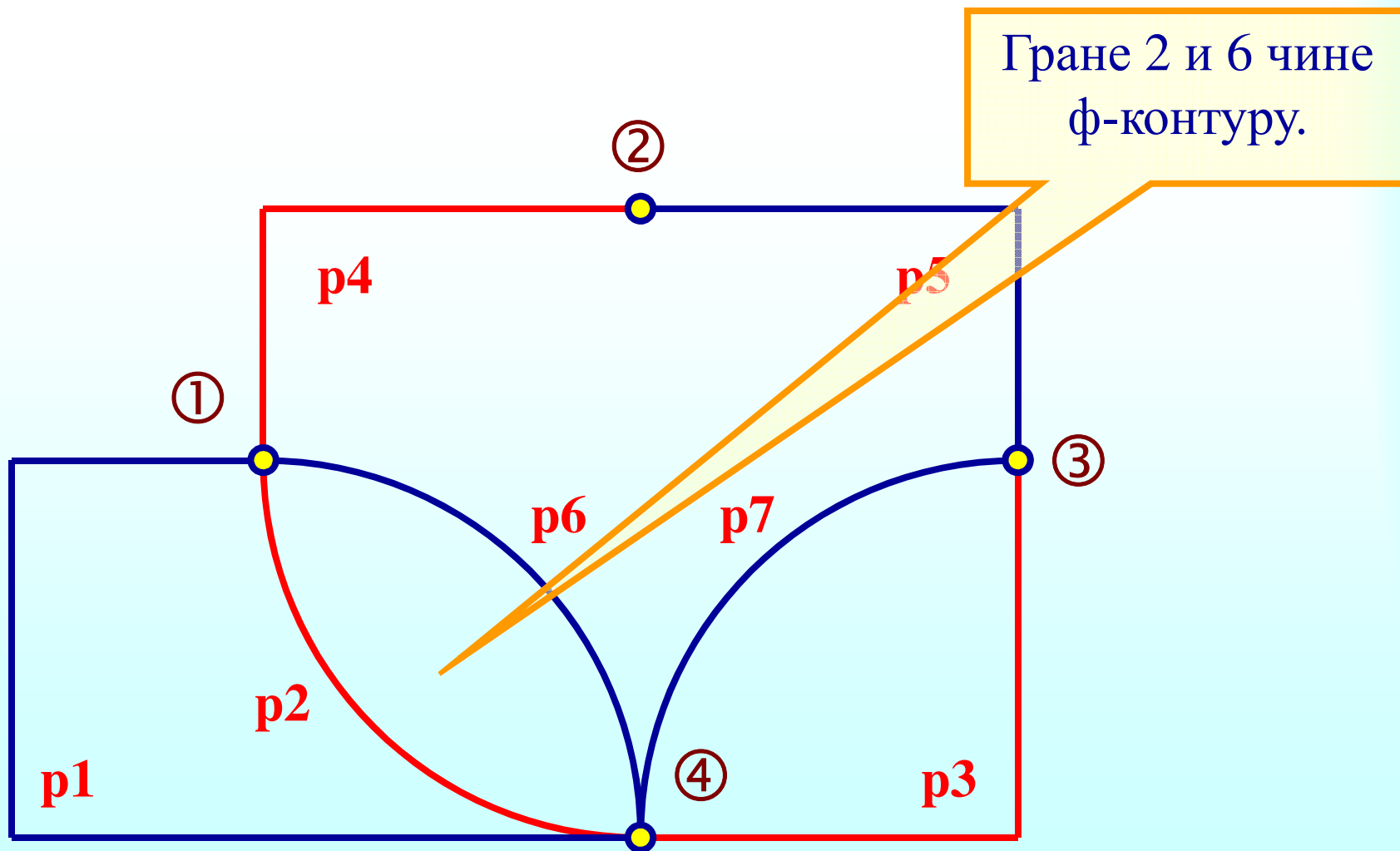
Пример стабла



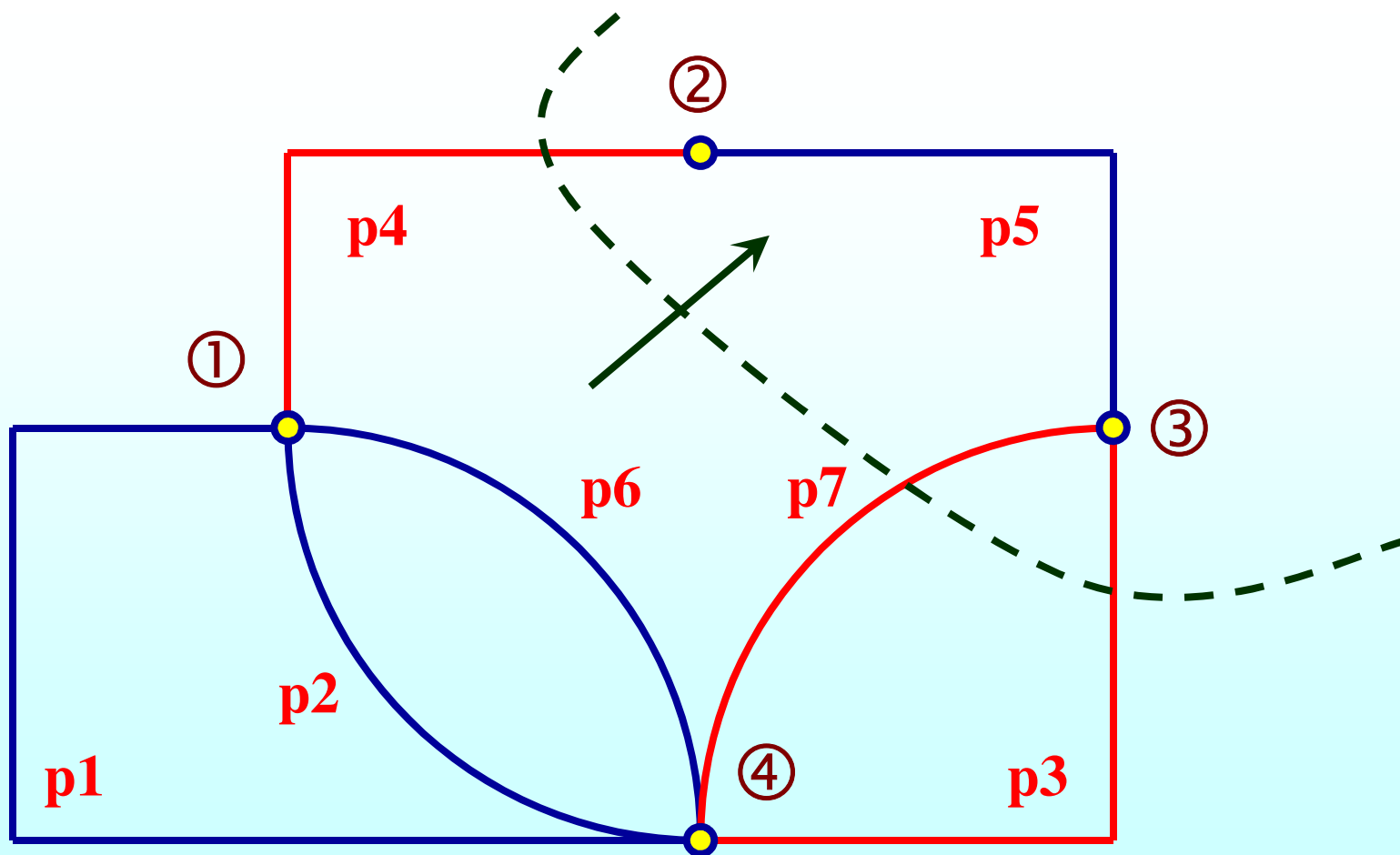
Фундаменталне контуре

- **Фундаментална контура** (*ϕ -контура*, *главна контура*) је контура образована из стабла додавањем једне спојнице.
- Број фундаменталних контура једнак је броју спојница.
- Фундаменталне контуре су значајне за постављање једначина електричног кола.

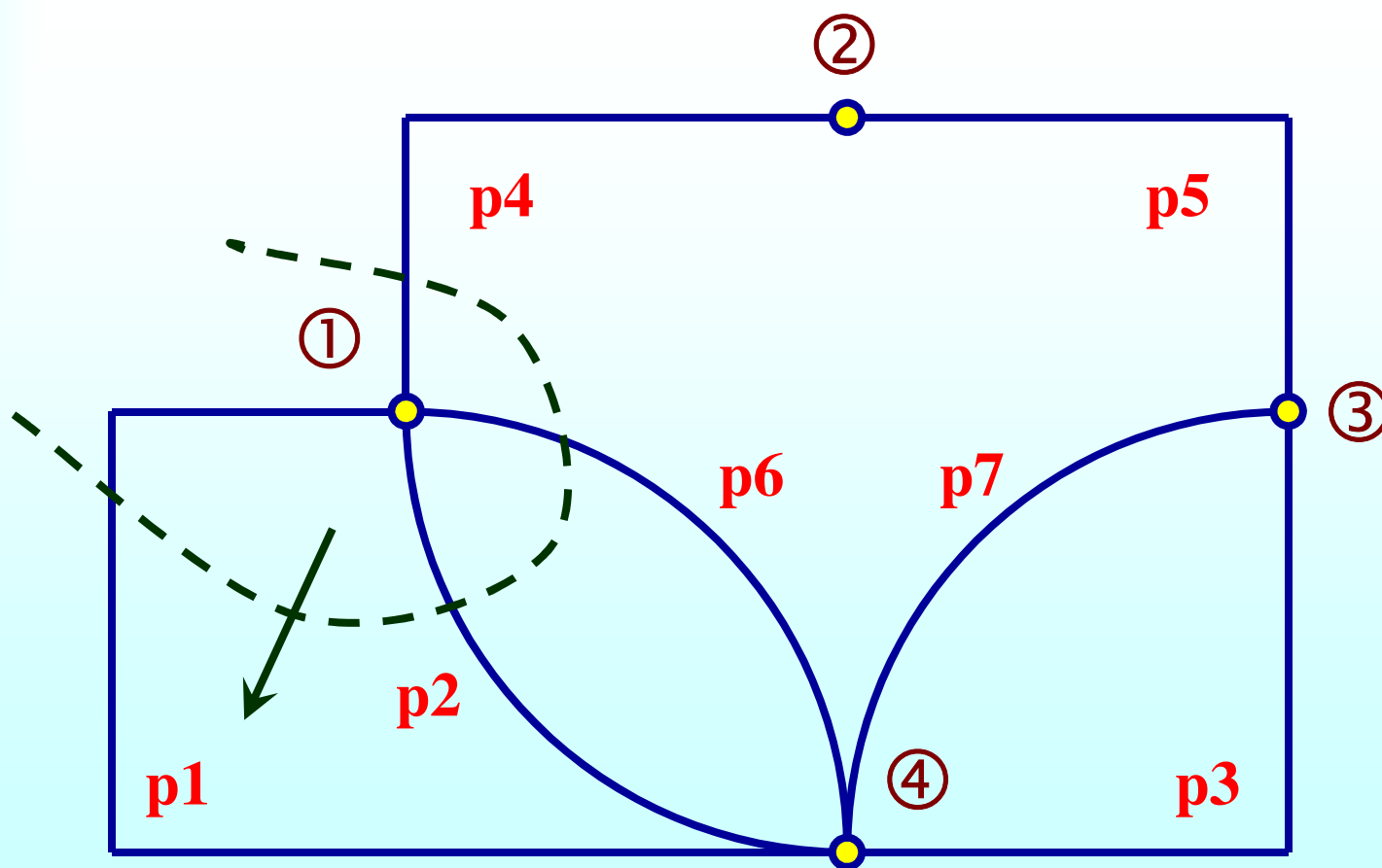
Пример ϕ -контуре



Пример пресека



Пример чворног пресека



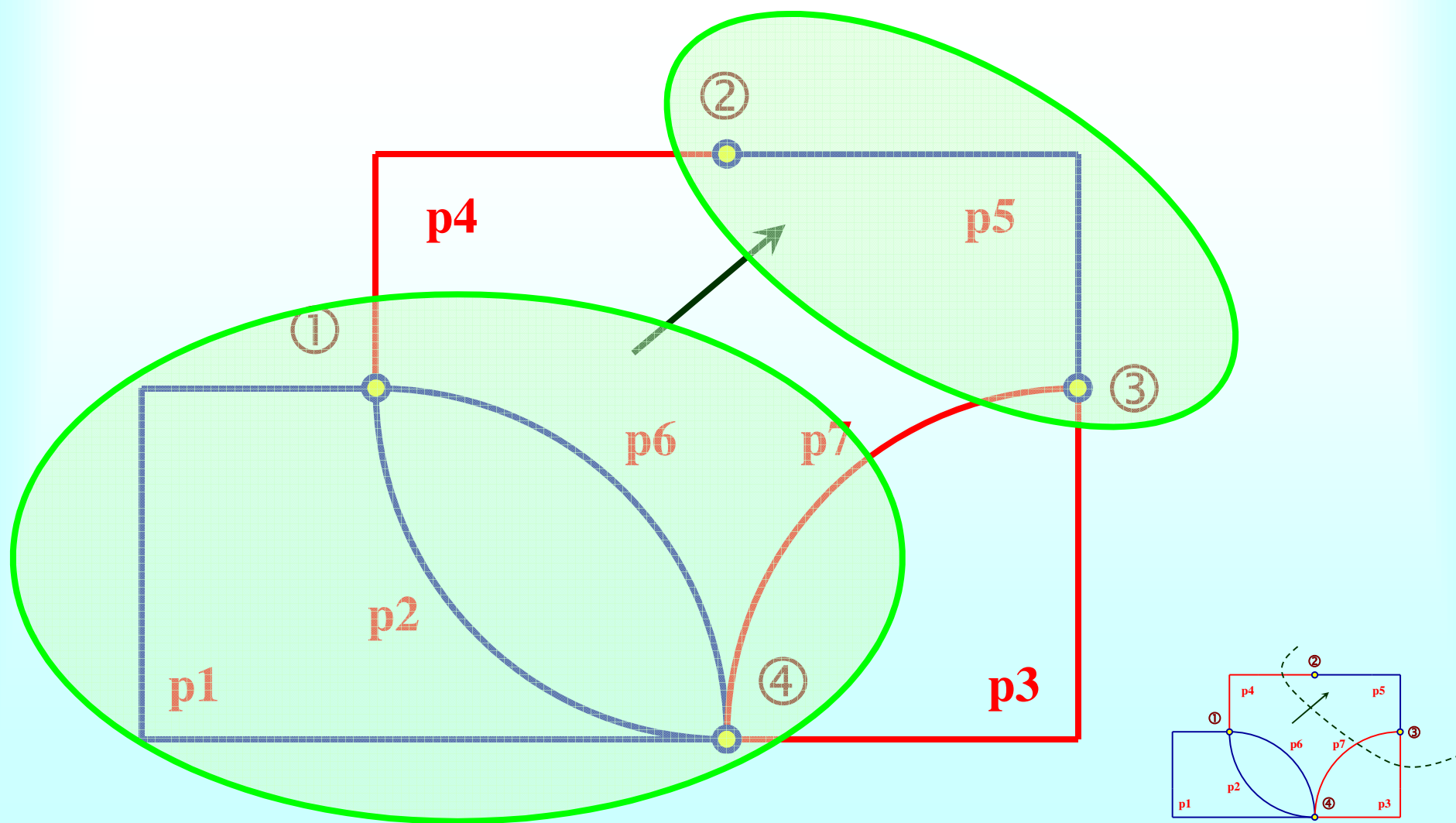
Фундаментални пресеци

- **Фундаментални пресек** (*ϕ -пресек*, *главни пресек*) је пресек који садржи само једну грану стабла.
- Број фундаменталних пресека једнак је броју грана стабла.
- Фундаментални пресеци су значајни за постављање једначина електричног кола.

Пресек – општа дефиниција

- **Пресек** је бипартиција чворова графа (подела скупа чворова графа на два дисјунктна подскупа чија је унија скуп свих чворова графа).
- **Сноп** је скуп грана графа које су једним крајем у једној партицији а другим крајем у другој партицији.

Пример пресека (бипартиције)



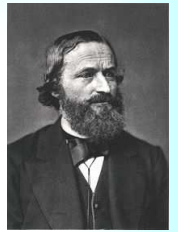
Тополошке релације

- Број чворова ћемо обележити са c .
- Број грана ћемо обележити са b .
- Број грана стабла повезаног графа једнак је

$$n = c - 1$$

- Број спојница повезаног графа износи

$$m = b - n$$



Кирхофови закони

- **КЗС:** Алгебарски збир ел. струја грана пресека једнак је нули.
- **КЗН:** Алгебарски збир ел. напона грана контуре једнак је нули.
- КЗ важе за сва електрична кола у сваком тренутку времена.
- КЗ су закони повезивања.
- КЗ су темељне **апериорне** једначине ТЕК.

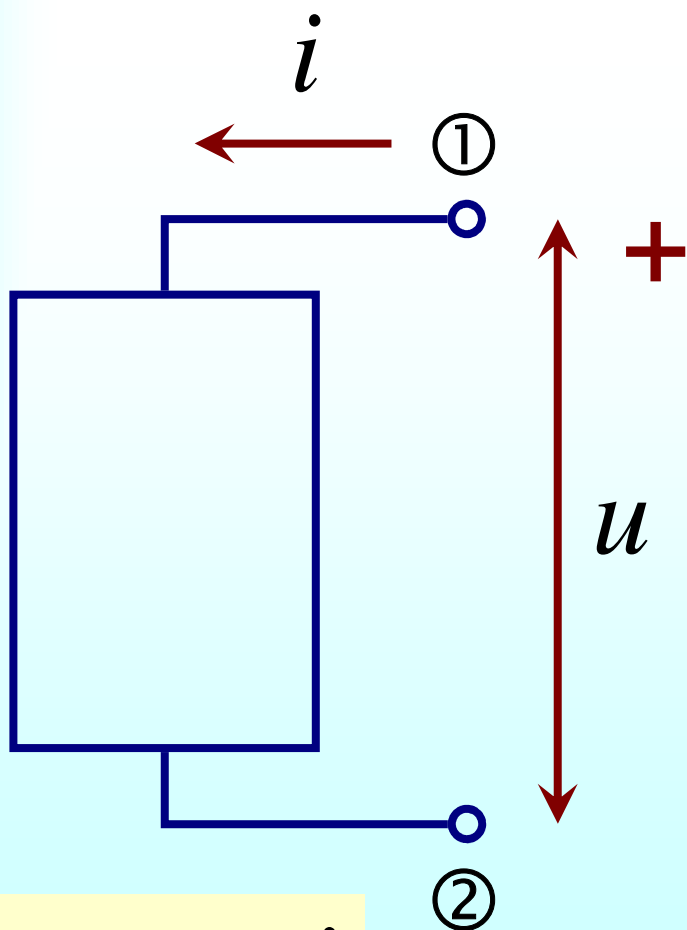
Како бирамо пресеке и контуре за постављање једначина по КЗ?

- Пресеке најчешће бирамо да буду чворни пресеци, па говоримо о КЗС за чворове.
- Контуре обично бирамо као окца.
- Ако окца нису очигледна, или подесна, контуре можемо изабрати као фундаменталне контуре.
- Избор контура постаје проблем код сложених, разгранатих, ел. кола.

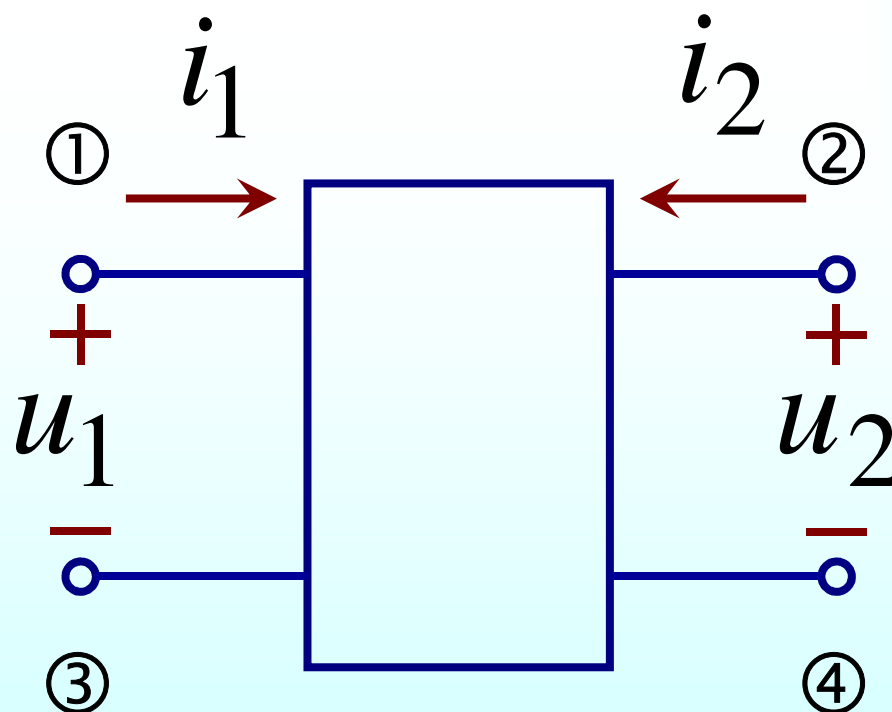
Снага гране

- **Снага гране** је производ ел. напона и ел. струје гране према стандардним смеровима ел. струје и ел. напона.
- Овако дефинисана снага је означена као *улазна тренутна снага гране*.
- Снага приступа ел. кола је исто што и снага одговарајуће гране графа ел. кола.
- **Снага елемента** је збир снага приступа.

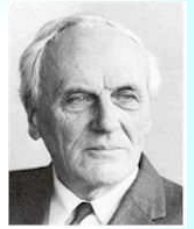
Снага елемента



$$p = u \cdot i$$



$$p = u_1 \cdot i_1 + u_2 \cdot i_2$$



Телегенов став (теорема)

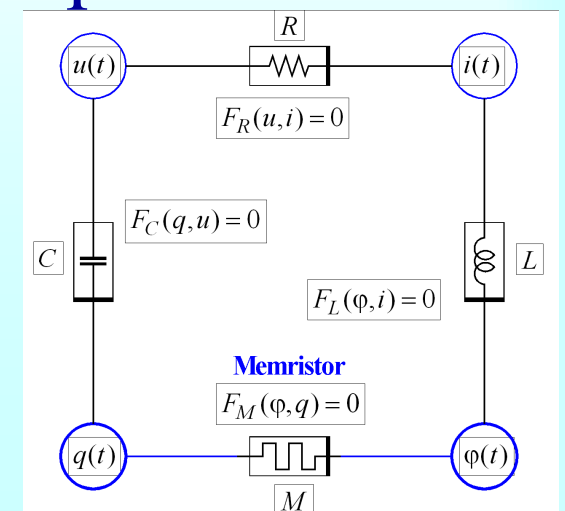
- **ТС:** Збир снага свих грана једнак је нули.
- Телегенов став важи за сва електрична кола у сваком тренутку времена.
- Наведени став је основни Телегенов став, а постоје и други сложенији искази.
- ТС је последица Кирхофових закона.

Једначине елемента

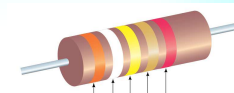
- Сваки елемент одсликава физичку појаву и процесе који се исказује математички.
- **Једначине елемента** су математичке релације које дефинишу везу физичких величина које елемент одсликава.
- Једначине елемента се још називају *дефиниционе једначине*, *карактеристике елемента* или *конститутивне једначине*.
- **Параметри елемента** су коефицијенти који се појављују у једначинама елемента.
- Параметри елемента се још називају и вредности елемента (*element values*).
- Параметри елемента су реални бројеви са или без димензије.
- **Елемент је линеаран** ако је описан линеарном алгебарском једначином кроз координатни почетак. $Ax + By = 0$
- Елемент је нелинеаран ако није линеаран.
- **Елемент је временски независан** ако његови параметри, коефицијенти у једначинама, не зависе од времена.
- Линеаран временски независан елемент се обележава са **LTI** (*Linear Time-Invariant*).
- Једначине елемента су темељне **априорне** једначине ТЕК.

Подела елемената

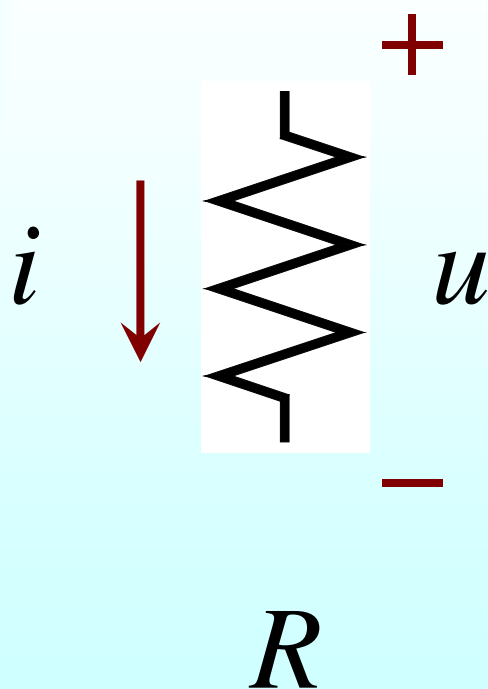
- **Отпорнички** (резистивни): описани су алгебарском везом напона и струје
- **Капацитивни**: описани су алгебарском везом наелектрисања и напона
- **Индуктивни**: описани су алгебарском везом флукса и струје
- Четири променљиве ел. кола:
 $u(t)$, $i(t)$, $q(t)$, $\varphi(t)$



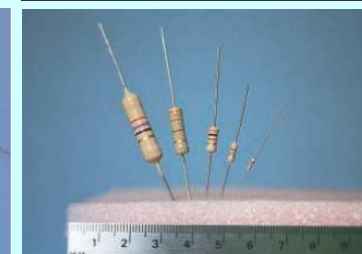
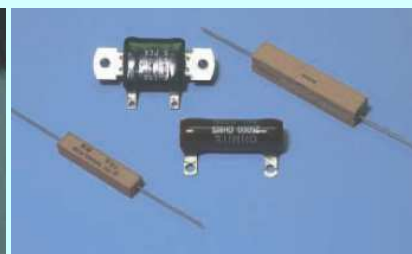
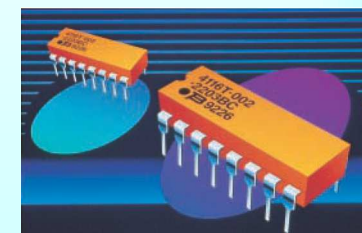
Једина апсолутно независна променљива је време, t .



Отпорник линеаран временски независан

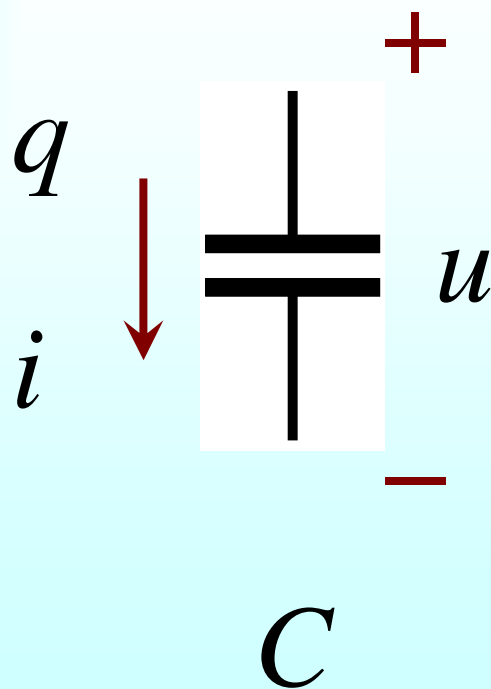


$$u = R \cdot i$$





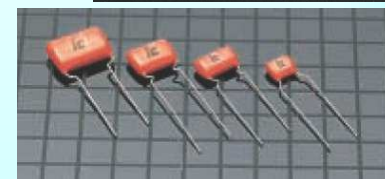
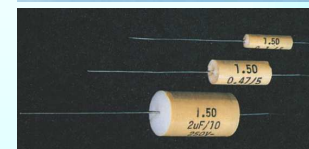
Кондензатор линеаран временски независан



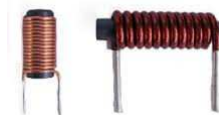
$$q = C \cdot u$$

$$i = \frac{dq}{dt}$$

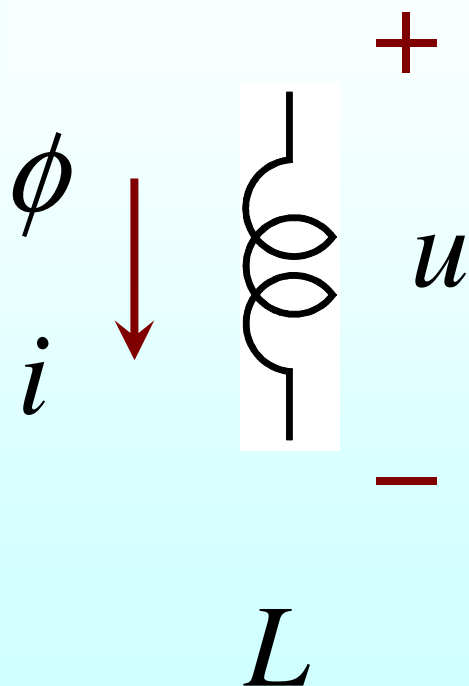
$$i = C \cdot \frac{du}{dt}$$



Калем линеаран временски независан



$$\phi = L \cdot i$$

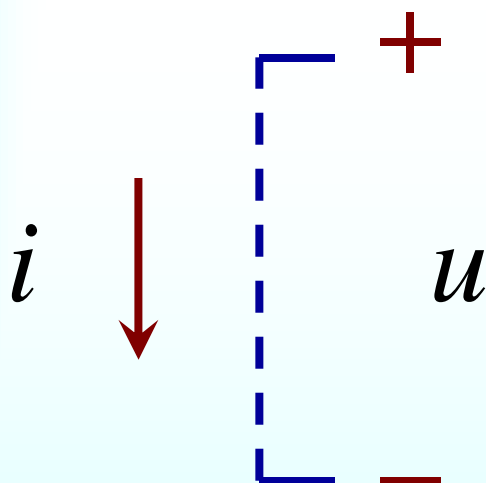


$$u = \frac{d\phi}{dt}$$

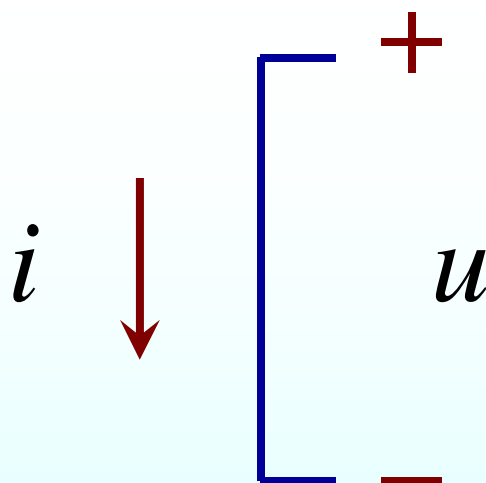
$$u = L \cdot \frac{di}{dt}$$



Отворена веза (прекид), Кратка веза (кратак спој)

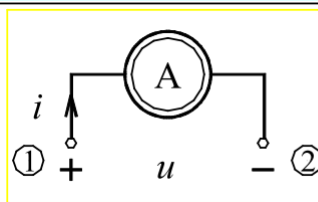


$$i = 0$$



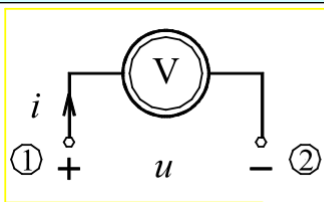
$$u = 0$$

Амперметар



$u = 0$
Кратак спој

Волтметар

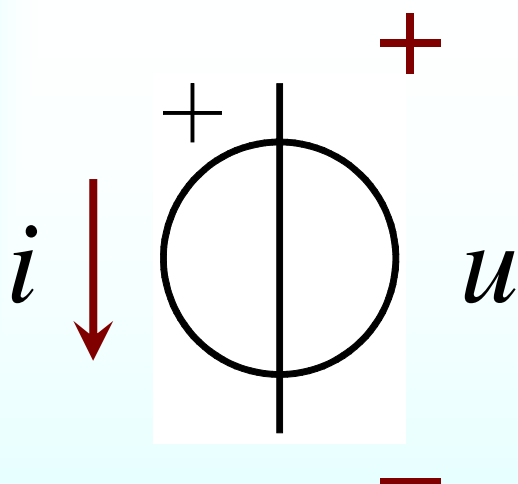


$i = 0$
Отворена веза

Напонски извор (генератор)

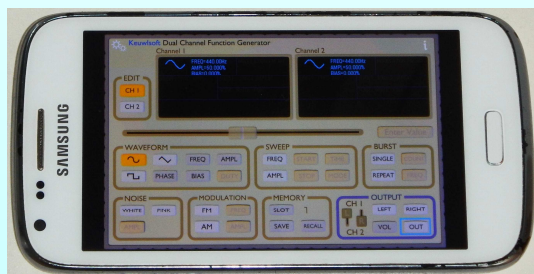


Идеалан
независан
напонски
генератор



Ел. напон је позната
функција времена

$$u = u_g(t)$$

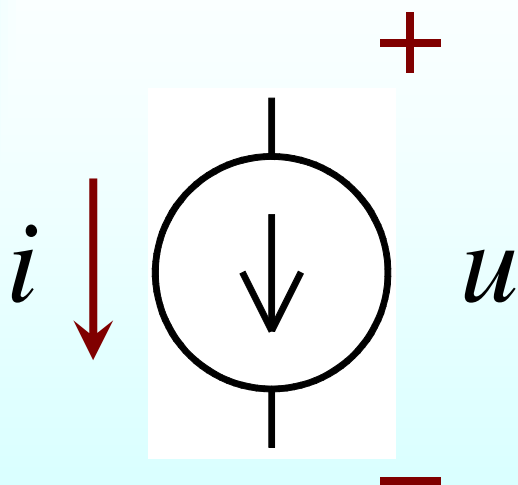


Напонски извор се може практично остварити у једном броју случајева и помоћу мобилног телефона програмом **Keuwlsoft Dual Channel Function Generator**.



Струјни извор (генератор)

Идеалан
независан
струјни
генератор

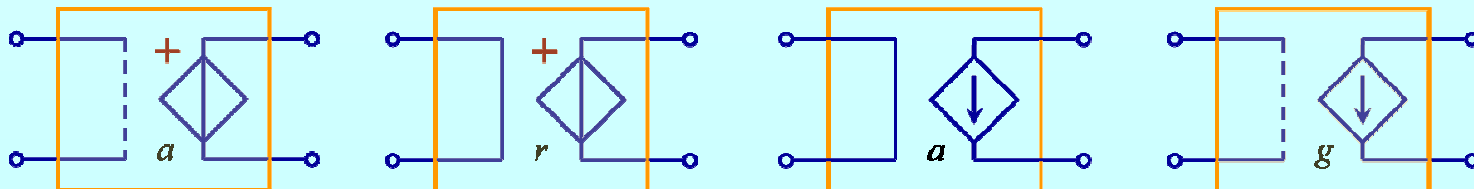


$$i = i_g(t)$$

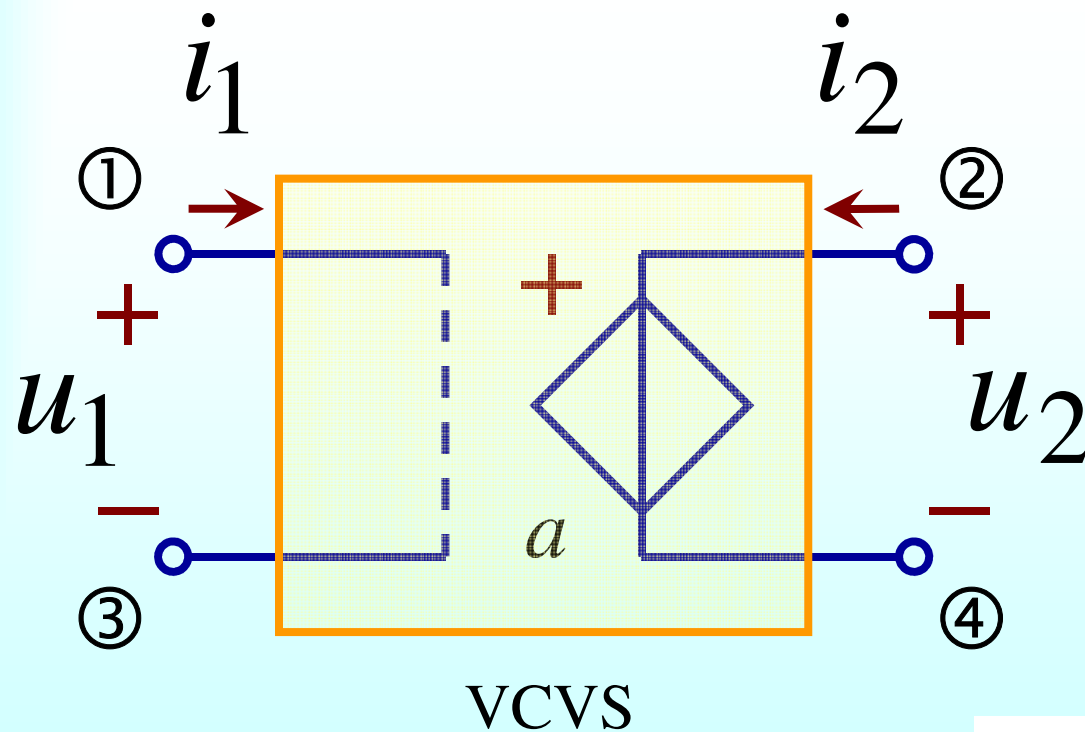
Ел. струја је позната
функција времена

Зависни извори

- ***Зависни извори***, који се називају и ***контролисани генератори***, су елементи са четири краја и два приступа.
- На једном приступу се понашају као отворена или кратка веза.
- На другом приступу се понашају као напонски или струјни извори управљани ел. напоном или ел. струјом гране.



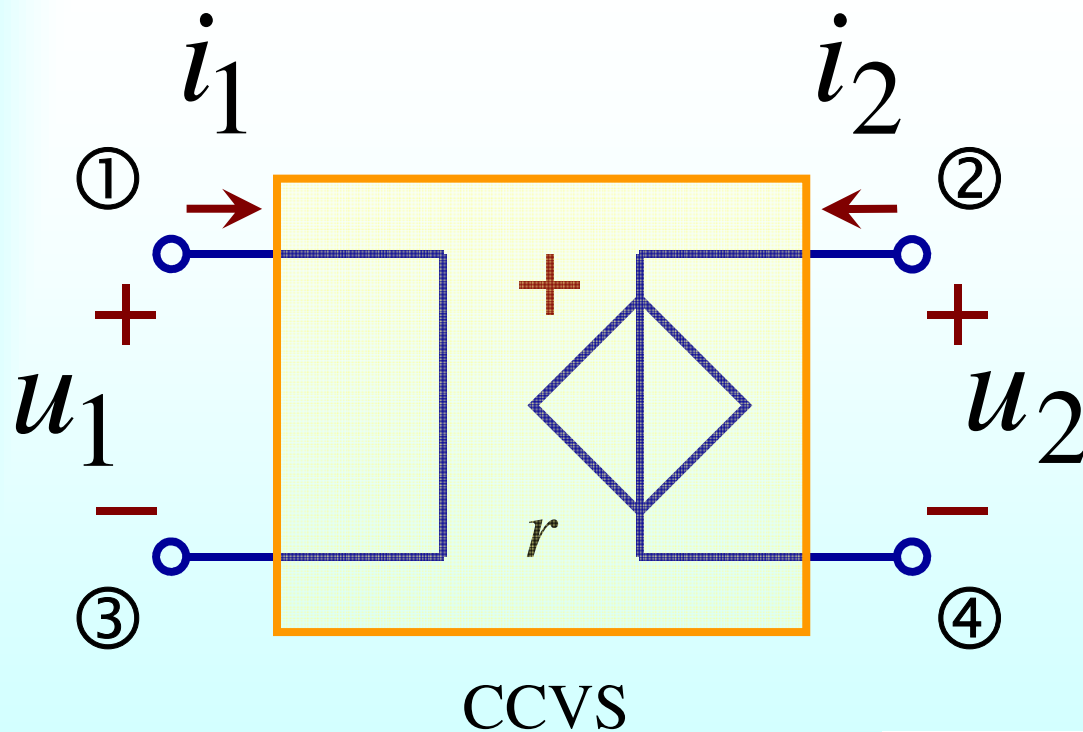
Напонски извор управљан напоном (VCVS, Voltage Controlled Voltage Source)



$$\begin{cases} u_2 = a \cdot u_1 \\ i_1 = 0 \end{cases}$$

Елемент се још назива
идеалан напонски појачавач

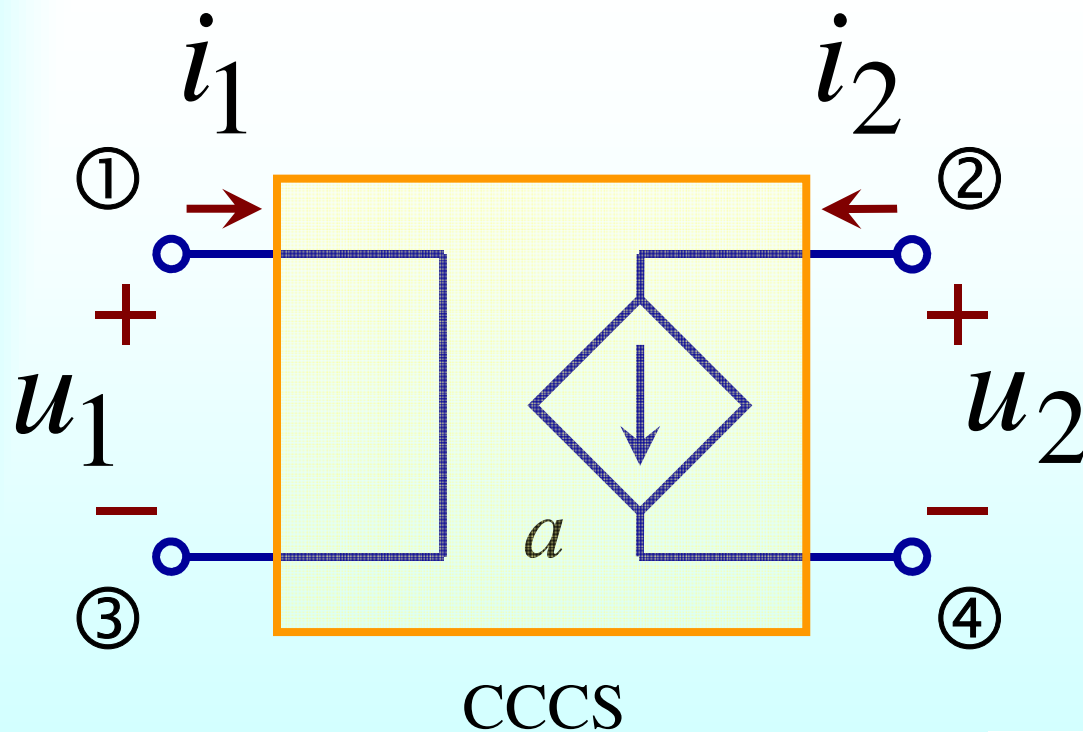
Напонски извор управљан струјом (CCVS, Current Controlled Voltage Source)



$$\begin{cases} u_2 = r \cdot i_1 \\ u_1 = 0 \end{cases}$$

Елемент се још назива *идеалан
трансрезистансни појачавач*

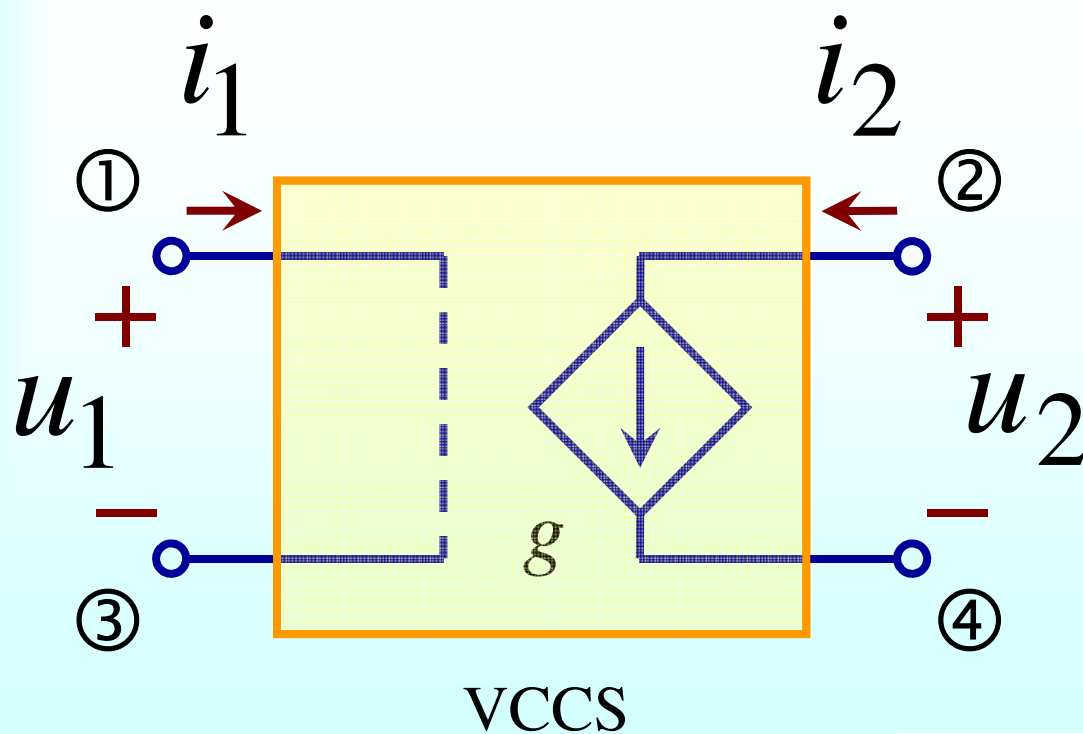
Струјни извор управљан струјом (CCCS, Current Controlled Current Source)



$$\begin{cases} i_2 = a \cdot i_1 \\ u_1 = 0 \end{cases}$$

Елемент се још назива
идеалан струјни појачавач

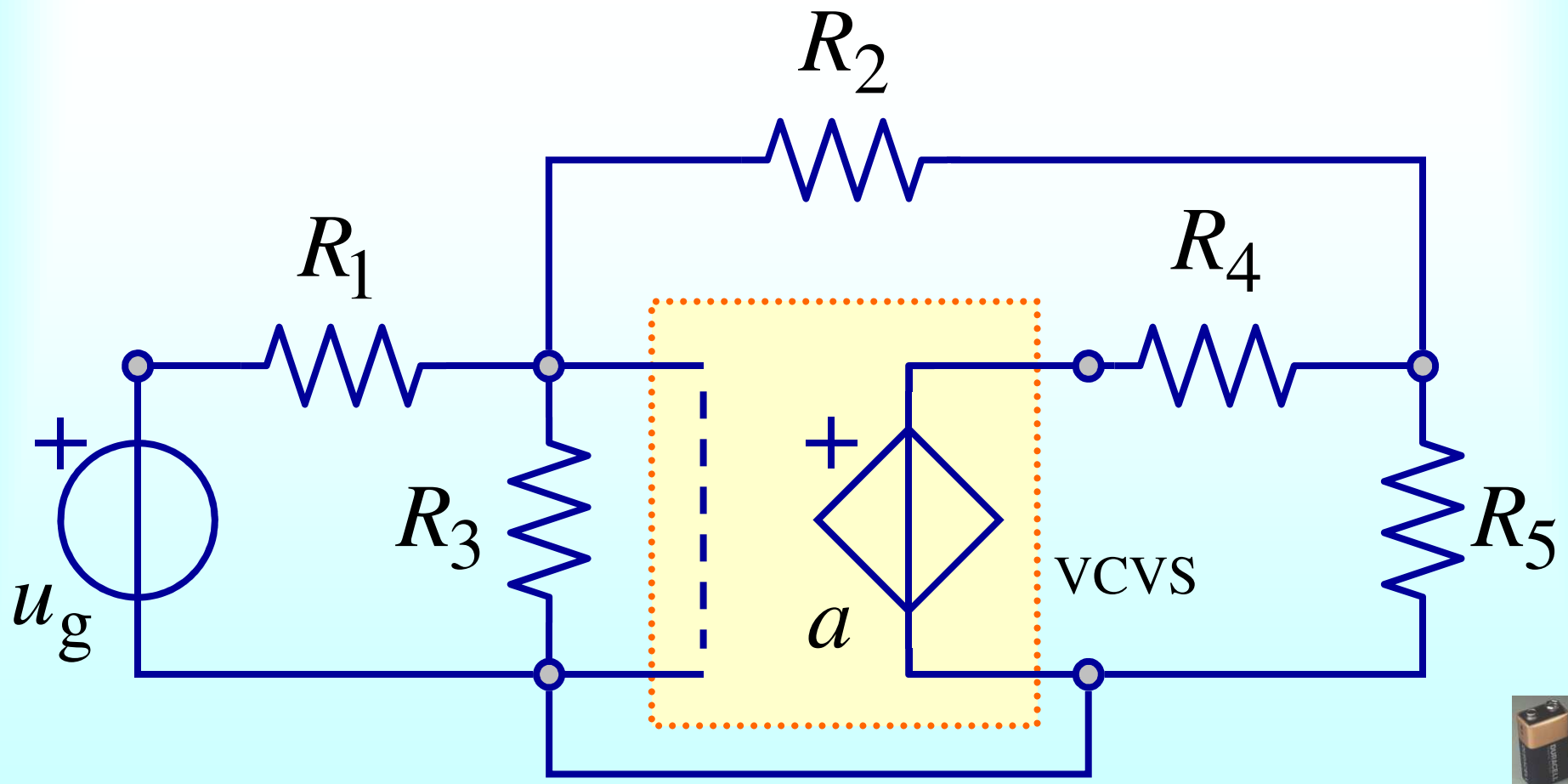
Струјни извор управљан напонам (VCCS, Voltage Controlled Current Source)



$$\begin{cases} i_2 = g \cdot u_1 \\ i_1 = 0 \end{cases}$$

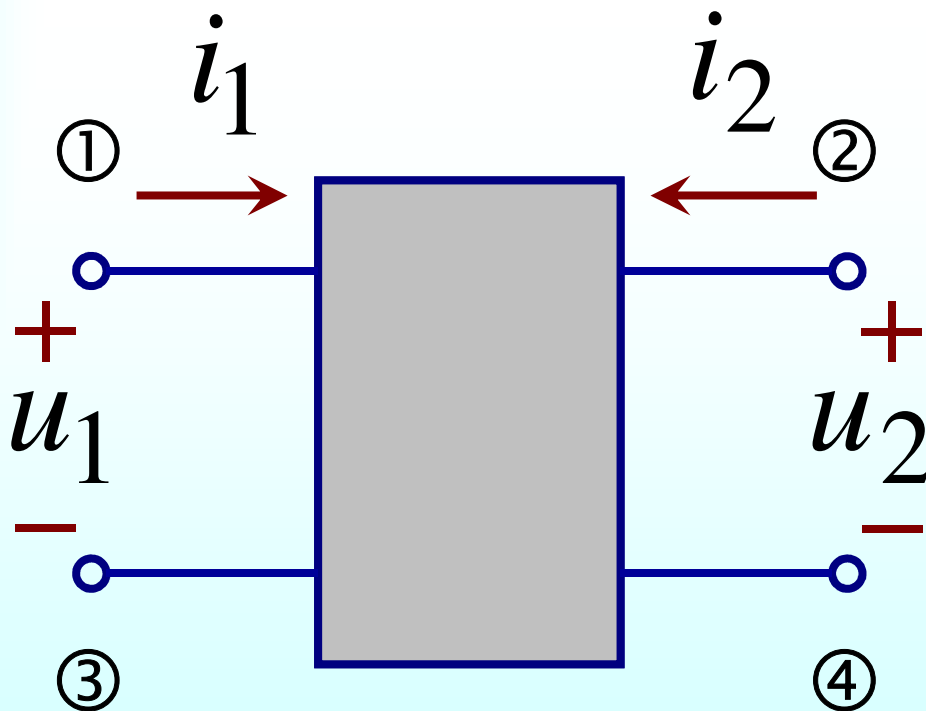
Елемент се још назива *идеалан транскондуктансни појачавач*

Пример електричног кола са зависним извором

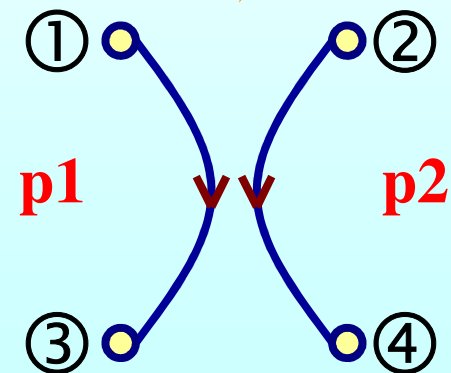


У практичном електричном колу са зависним изворима неопходно је напајање независним извором сталног напона.

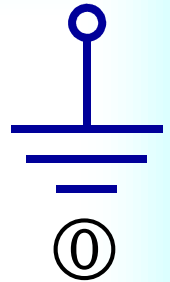
Граф елемента са два приступа



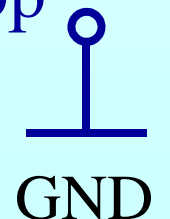
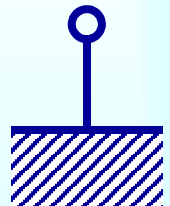
Зависни извори имају граф као и сваки други елемент са два приступа



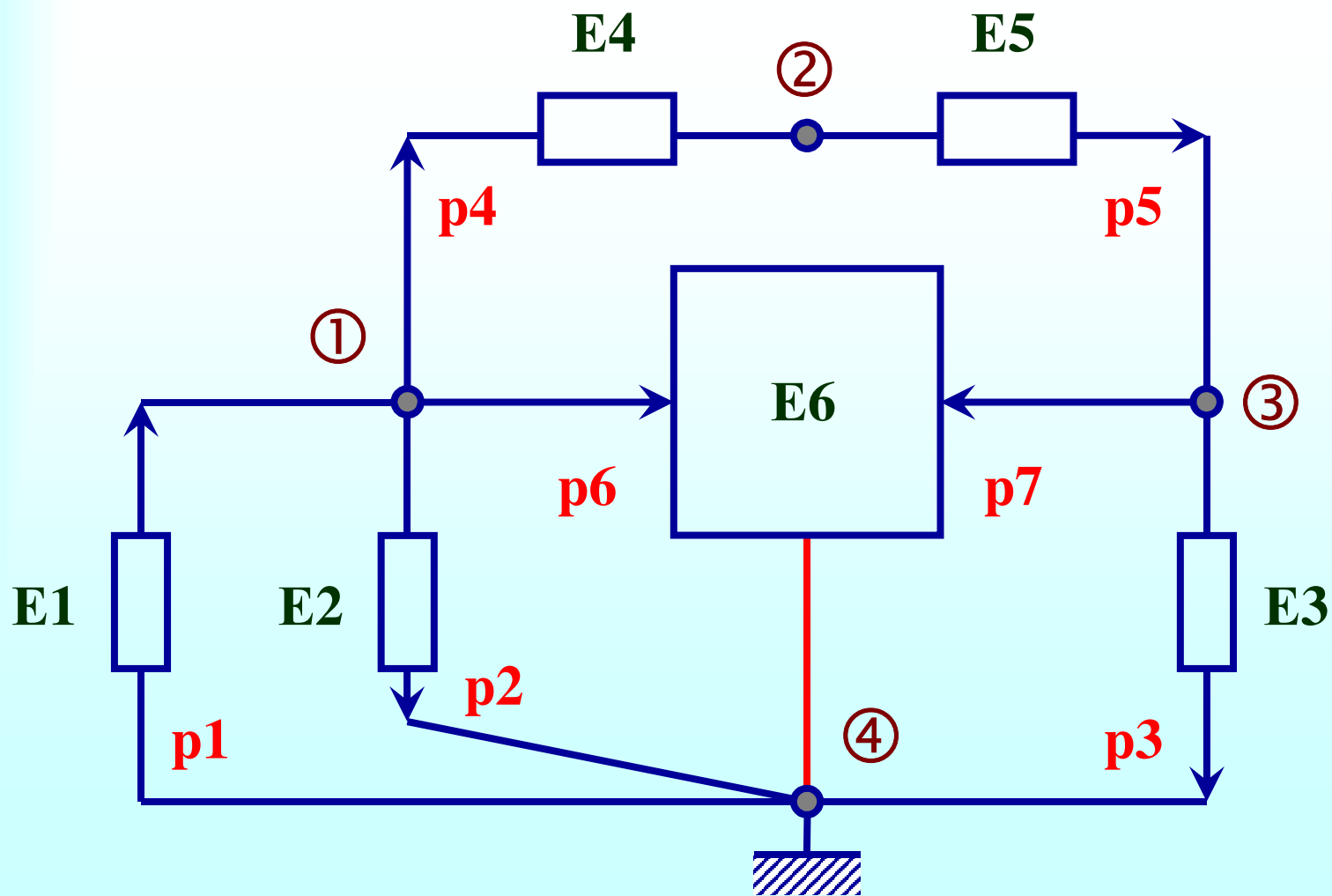
Упоредни чвор



- **Упоредни чвор** (*референтни чвор, нулти чвор, нула, маса, уземљење (GrouND)*) је чвор ел. кола који се у пракси често везује за уземљење инсталације, кућиште склопа, оклоп уређаја, и слично.
- Напон између чвора и упоредног чвора зове се *напон чвора* (некада, напон у тачки) или **потенцијал чвора**.
- Упоредни чвор се обележава са ⑦.
- Крај елемента који је повезан на упоредни чвор се обично **не** црта.

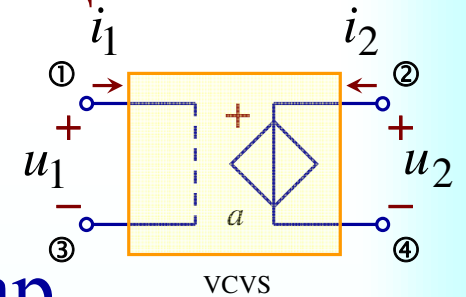


Изоостављање крајева који су повезани на упоредни чвор



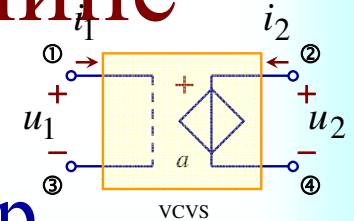
Операциони појачавач: Концепт

- Посматраћемо напонски извор управљан напоном чији параметар (појачање) неограничено расте.
- Сматраћемо да су ел. напони и струје приступа коначни.
- Једначине елемента преуредимо на облик



$$\begin{cases} u_1 = \frac{1}{a} u_2 \\ i_1 = 0 \end{cases}$$

Операциони појачавач: Једначине

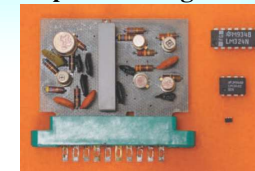


- У граничном процесу, када параметар (појачање) неограничено расте, једначине елемента постају
- Електрични напон и струја првог приступа су једнаки нули.
- Елемент са оваквим једначинама назива се *идеалан операциони појачавач*.

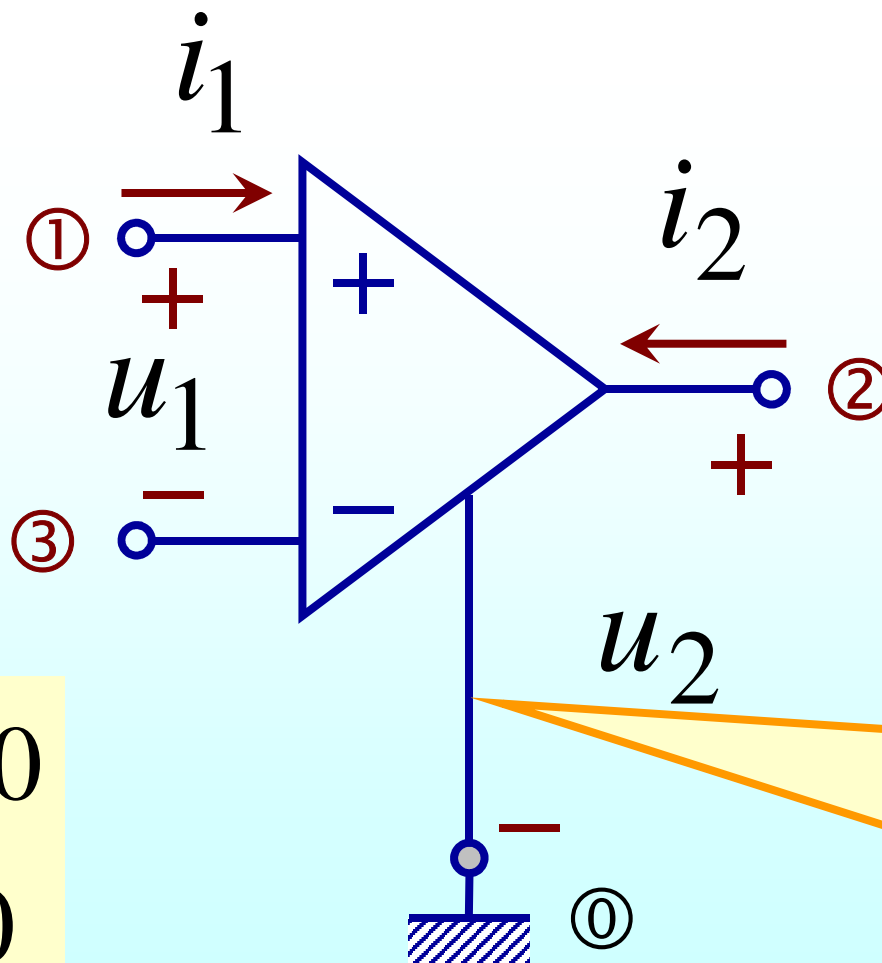
$$a \rightarrow \infty$$

$$\begin{cases} u_1 = 0 \\ i_1 = 0 \end{cases}$$

Operational amplifier, OpAmp, OA



Идеалан операциони појачавач



Идеалан
операциони
појачавач
ћемо краће
звати само
*операциони
појачавач.*

$$\begin{cases} u_1 = 0 \\ i_1 = 0 \end{cases}$$

Терминал
(прикључно место)
који се повезује на
упоредни чвор се,
договорно, **не црта.**

Практичан ОпАмп

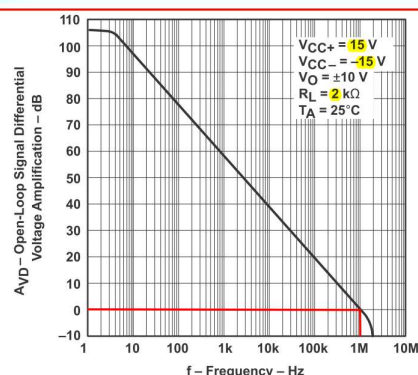
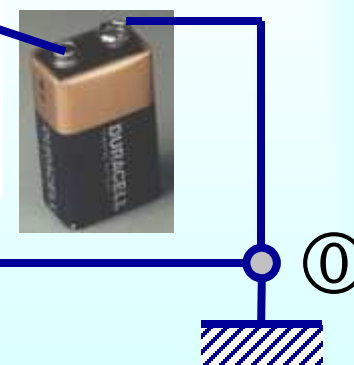
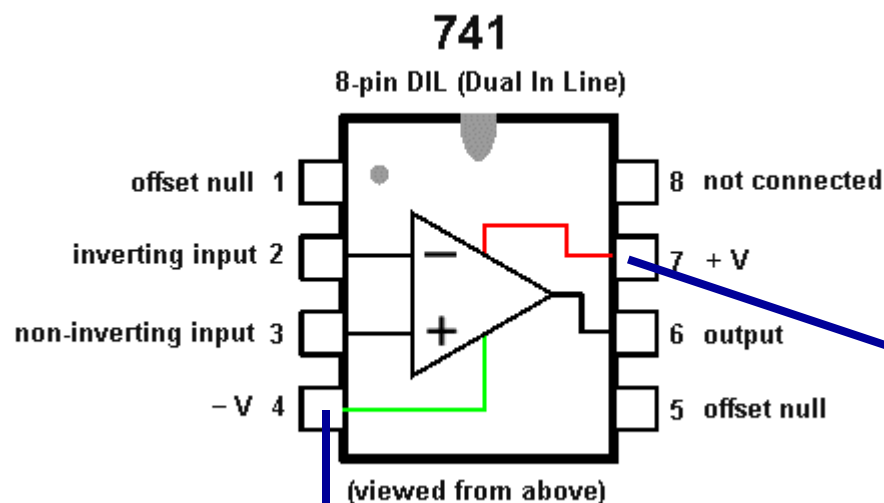
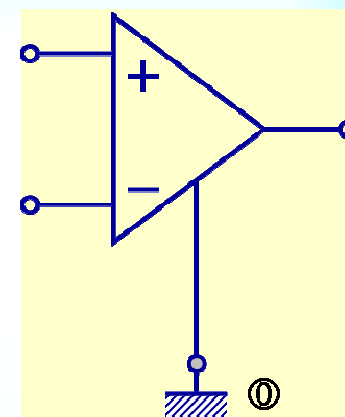
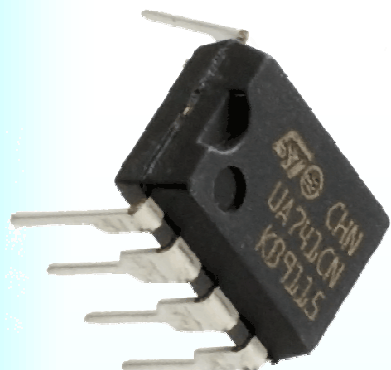
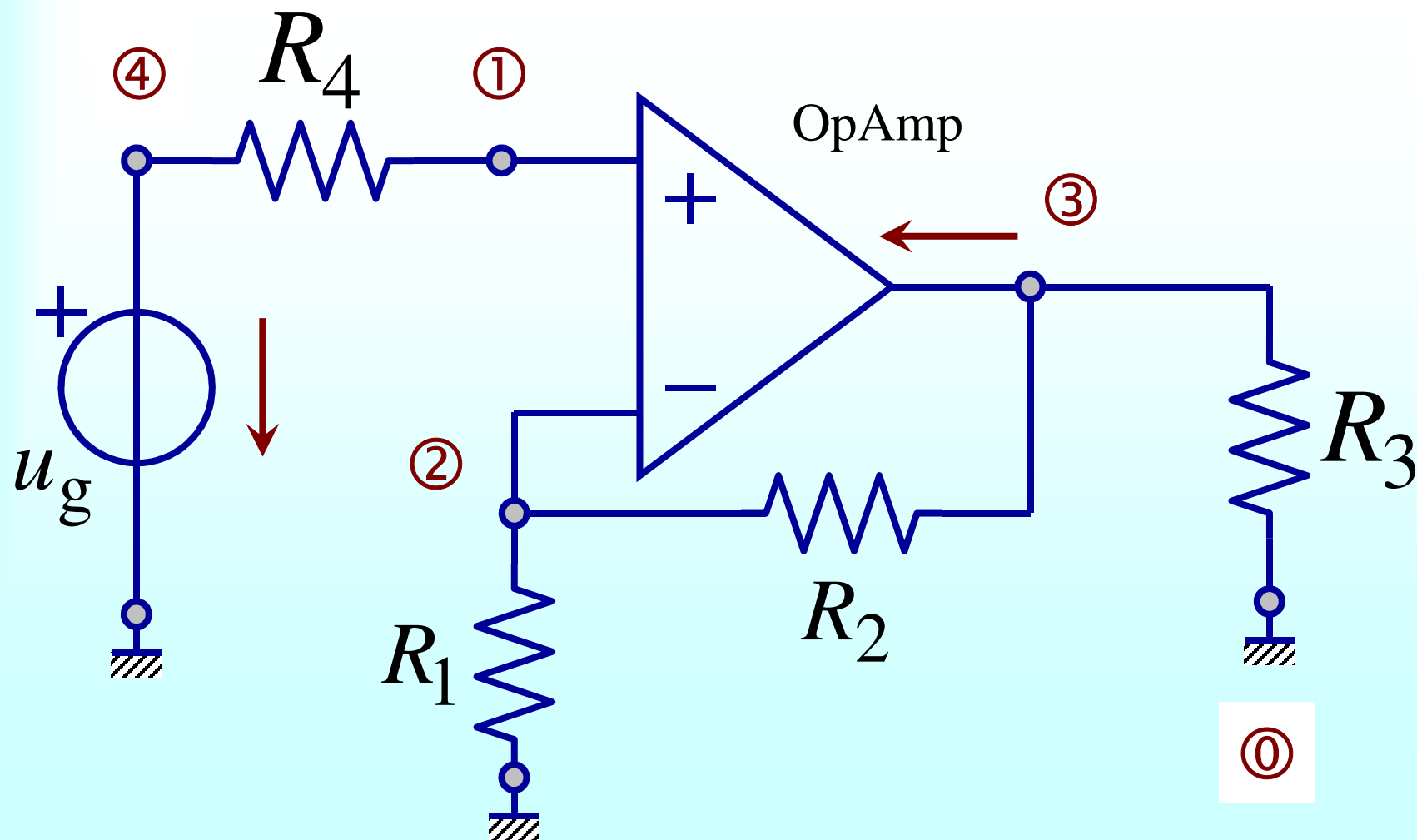


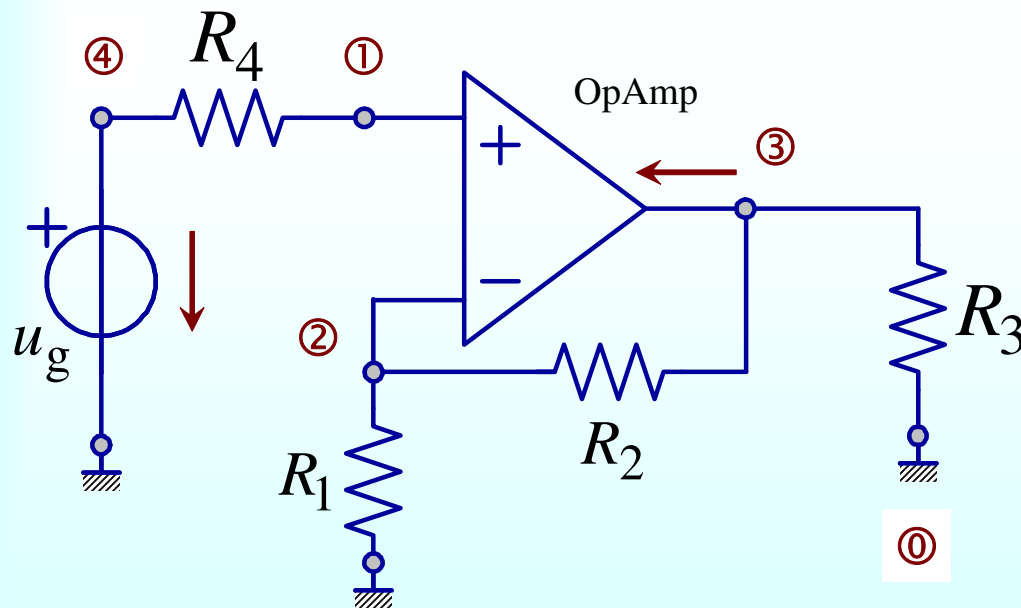
Figure 7. Open-Loop Large-Signal Differential Voltage Amplification vs Frequency

A_{VD}	Large-signal differential voltage amplification	$R_L \geq 2k\Omega$	25°C	20	200	50	200	V/mV
		$V_O = \pm 10 V$	Full range	15		25		
r_i	Input resistance		25°C	0.3	2	0.3	2	MΩ
r_o	Output resistance	$V_O = 0$, See ⁽²⁾	25°C		75		75	Ω
C_i	Input capacitance		25°C		1.4		1.4	pF

Пример електричног кола са операционим појачавачем



Решење ел. кола са опер. појач.



Дејан Тошић, **SALECx** – Symbolic
Analysis of Linear Electric Circuits
with Maxima, version 1.0, 2019.

MaximaOnAndroid

Dejan Tomic, SALECx 2019 v1.0

```
(%i7) NonInvAmp_Schema:[["V","Vg",4,0,Ug],
["R","R4",4,1,R4],
["OpAmp","OpAmp",[1,2],3],["R","R1",2,0,R1],
["R","R2",2,3,R2],["R","R3",3,0,R3]]
```

```
(%i8)
```

```
NonInvAmp_Response:SALECx(NonInvAmp_Schema)
ARRSTORE: use_fast_arrays=false; allocate a new
property hash table for |$j|
ARRSTORE: use_fast_arrays=false; allocate a new
property hash table for |$v|
```

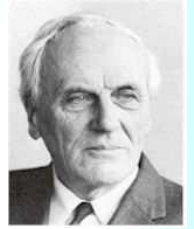
```
(%i9) transpose(NonInvAmp_Response)
```

$$\begin{pmatrix} V_1 = U_g \\ V_2 = U_g \\ V_3 = \frac{R_2 U_g + R_1 U_g}{R_1} \\ V_4 = U_g \\ I_{\text{OpAmp}} = -\frac{R_3 U_g + R_2 U_g + R_1 U_g}{R_1 R_3} \\ I_{Vg} = 0 \end{pmatrix}$$

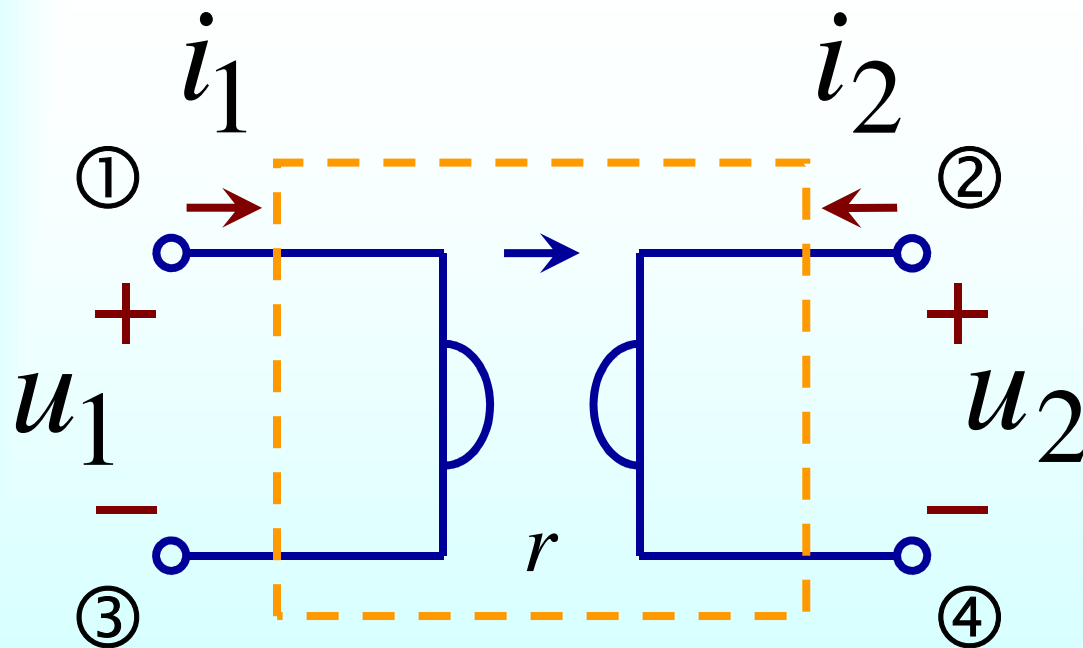
```
(%i10) A:ev(V[3]/Ug,NonInvAmp_Response,expand)
```

$$\frac{R_2}{R_1} + 1$$

batch("/data/data/jp.yhonda/cac Enter



Жиратор



$$\begin{cases} u_1 = -r \cdot i_2 \\ u_2 = r \cdot i_1 \end{cases}$$

Елемент се користи, на пример,
у теорији електричних филтара.

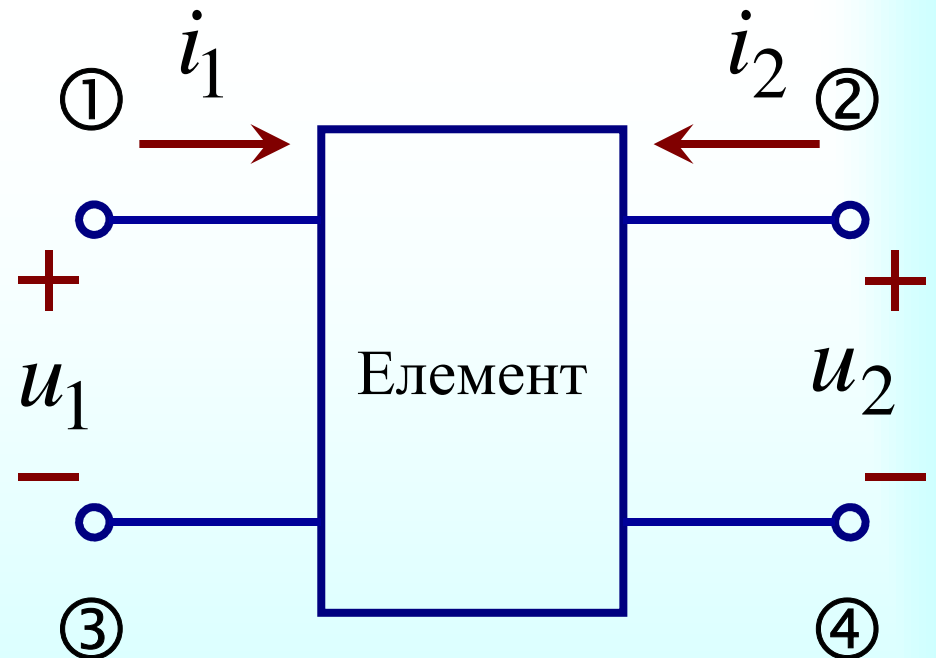
Конвертор и инвертор

$$\begin{cases} u_1 = ku_2 \\ i_1 = \frac{1}{k}i_2 \end{cases}$$

**Негативни
импедансни
конвертор**

$$\begin{cases} u_1 = ri_2 \\ u_2 = ri_1 \end{cases}$$

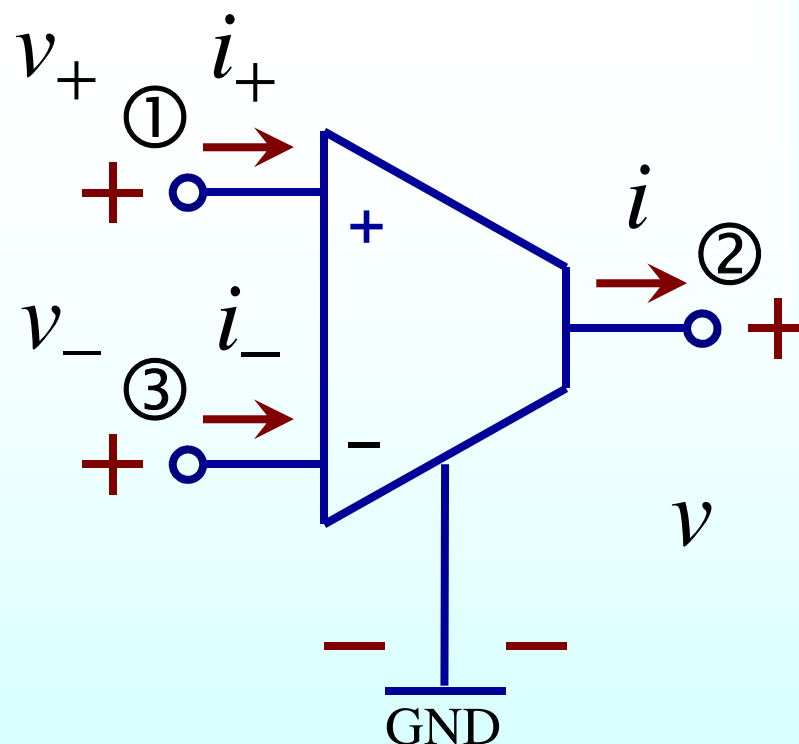
**Негативни
импедансни
инвертор**



Елемент се користи, на пример,
у синтези електричних мрежа.

ОТА

$$\begin{cases} i_+ = 0 \\ i_- = 0 \\ i = g(v_+ - v_-) \end{cases}$$



OTA, Operational
Transconductance Amplifier

Елемент се користи у моделовању
интегрисаних аналогних направа.

Струјни појачавачи

DCA

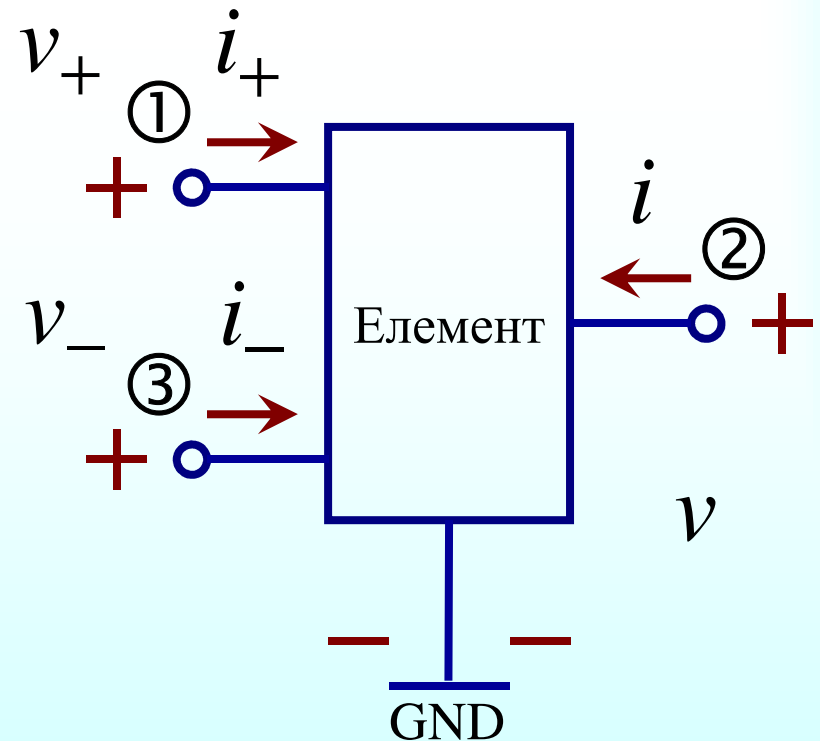
$$\begin{cases} v_+ = 0 \\ v_- = 0 \\ i = a(i_+ - i_-) \end{cases}$$

CDA

$$\begin{cases} v_+ = 0 \\ v_- = 0 \\ i_+ = i_- \end{cases}$$

CFOA

$$\begin{cases} v_+ = v_- \\ i_+ = 0 \\ v = ri_- \end{cases}$$

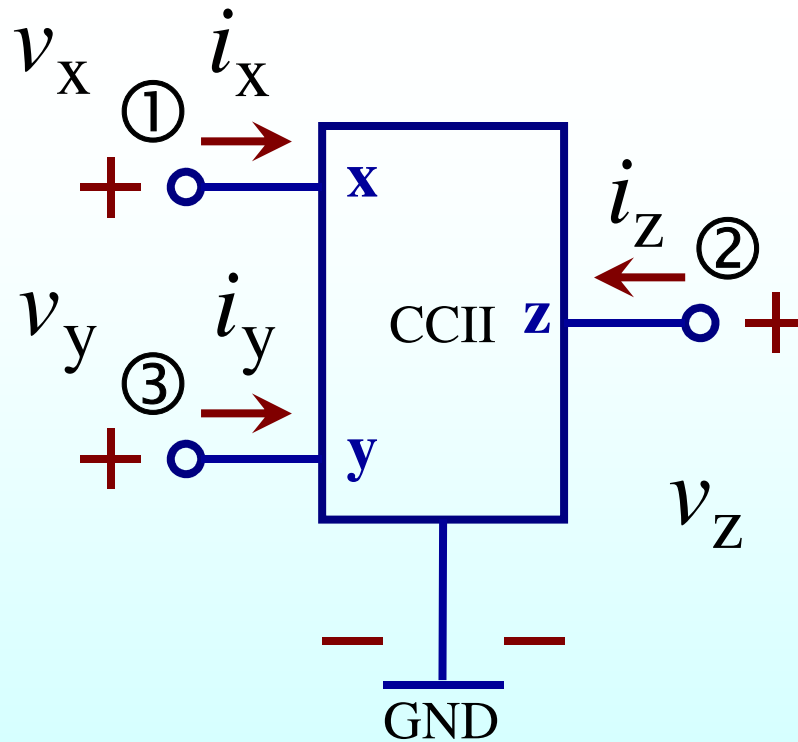


Елемент се користи у моделовању интегрисаних аналогних направа.

ССII (струјни преносник)

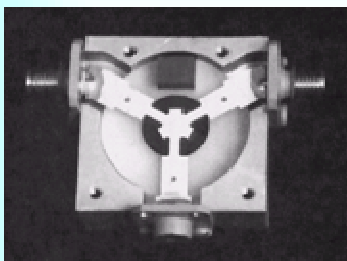
$$\begin{cases} v_x = v_y \\ i_y = 0 \\ i_z = ai_x \end{cases}$$

$$a \in \{-1, 1\}$$



CCII, the second generation
Current Conveyors

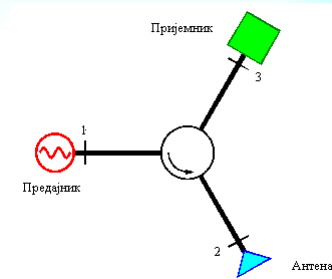
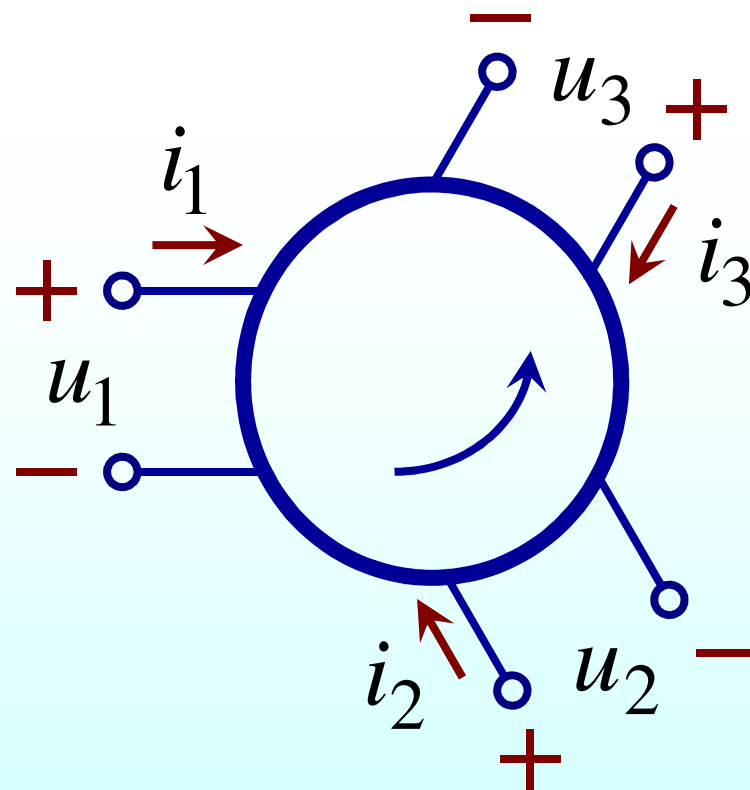
Елемент се користи у моделовању
интегрисаних аналогних направа.



Циркулатор

$$\begin{cases} u_1 = ri_2 - ri_3 \\ u_2 = -ri_1 + ri_3 \\ u_3 = ri_1 - ri_2 \end{cases}$$

Циркулатор се примењује у комуникационим и радарским системима који користе једну антену и за предају и за пријем.



Елемент се користи у моделовању микроталасних направа.

```
cirkulator.nb

Испитати да ли је циркулатор елемент без губитака

In[1]:= jednacine =
      {u1 == r * i2 - r * i3,
      u2 == -r * i1 + r * i3,
      u3 == r * i1 - r * i2};

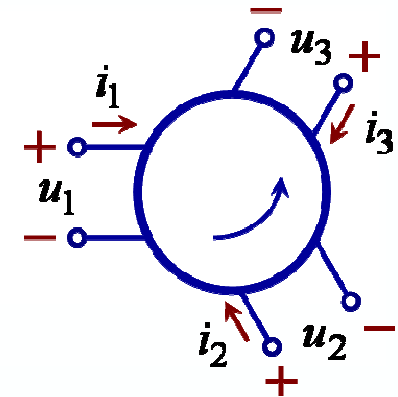
In[2]:= p = u1 * i1 + u2 * i2 + u3 * i3;

In[3]:= zamena =
      p /.
      (Apply[Rule, #] & /@
      jednacine)

Out[3]= i3 (i1 r - i2 r) +
      i1 (i2 r - i3 r) + i2 (-i1 r + i3 r)

In[4]:= zamena // Simplify

Out[4]= 0
```



$$\begin{cases} u_1 = r i_2 - r i_3 \\ u_2 = -r i_1 + r i_3 \\ u_3 = r i_1 - r i_2 \end{cases}$$

Mathematica

Wolfram Research, Inc.

Maxima

wxMaxima 16.04.2 [Cirkulator_Slide.wxmx]
File Edit View Cell Maxima Equations Algebra Calculus Simplify Plot Numeric Help

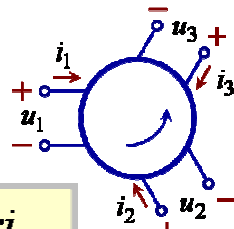
Испитати да ли је циркулатор пасиван елемент.

```
(%i1)  jednaccine:
      [
        u1 = r*i2 - r*i3,
        u2 = -r*i1 + r*i3,
        u3 = r*i1 - r*i2
      ];
```

(jedenaccine) [u1=i2 r-i3 r, u2=i3 r-i1 r, u3=i1 r-i2 r]

```
(%i2)  p: u1*i1 + u2*i2 + u3*i3, jednaccine, ratsimp;
(p)    0
```

Снага елемента (тренутна улазна снага)
је идентички једнака нули,
те је елемент пасиван и без губитака.


$$\begin{cases} u_1 = r i_2 - r i_3 \\ u_2 = -r i_1 + r i_3 \\ u_3 = r i_1 - r i_2 \end{cases}$$

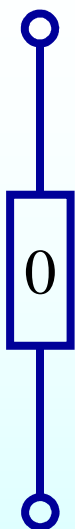
Welcome to wxMaxima

Saving successful.



Сингуларни елементи

Нулатор



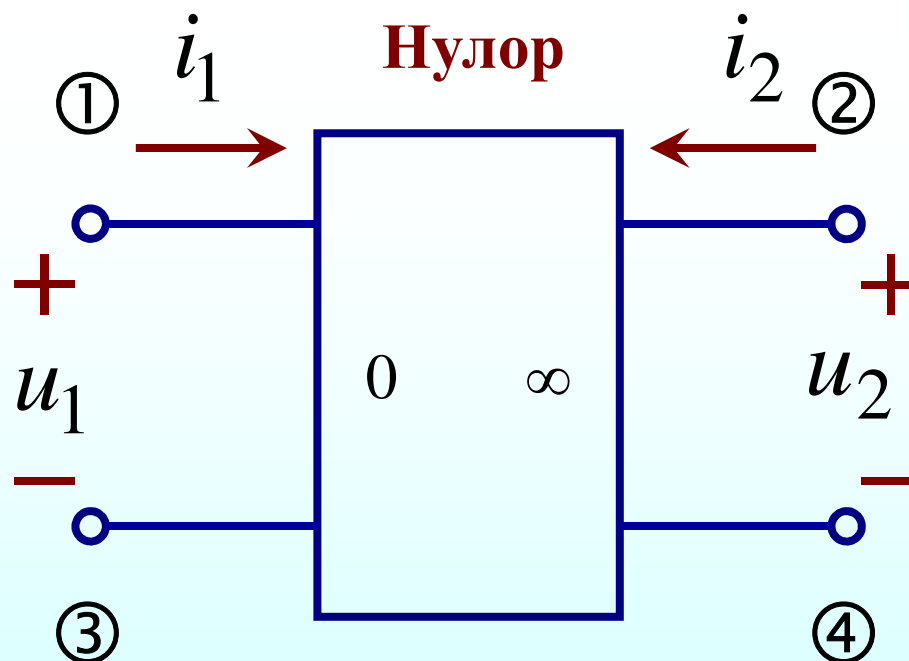
$$\begin{cases} u = 0 \\ i = 0 \end{cases}$$

Норатор



$$\begin{cases} \forall u \\ \forall i \end{cases}$$

Нулор



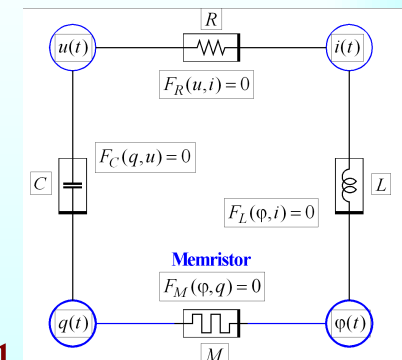
$$\begin{cases} u_1 = 0 \\ i_1 = 0 \end{cases}$$



Мемристор

$$F(q, \varphi) = 0$$

- Постулирао Leon **Chua** 1973. као елемент са два краја описан једначином која повезује наелектрисање (интеграл струје) и флукс (интеграл напона), назвао memristor – MEMory ResISTOR.
- Недостајући основни, четврти, елемент.
- Остварен (имплементиран) 2008, Stanley **Williams**, HP Labs.
- Комерцијално доступан 2015, **Knowm**, Inc. Bio Inspired Technologies LLC.
- S. Vaidyanathan, C. Volos, **Advances in Memristors, Memristive Devices and Systems**, Springer, 2017.
- Christos Volos and Viet-Thanh Pham (Editors), **Mem-elements for Neuromorphic Circuits with Artificial Intelligence Applications**, Academic Press, 2021.
- Chapter 4. Milka M. Potrebić and Dejan V. Tošić, *"Microwave memristive components for smart RF front-end modules"*.



Radioengineering, June 2015, Volume 24, Number 2, ISSN 1210-2512, Part I:
Special Issue on Memristor Theory, Modeling and Simulation.

Ако се појави нови елемент?

- Према шематској ознаци и документацији треба утврдити
- број крајева (терминала)
- начин образовања приступа
- упоредне смерове
- једначине елемента (према усвојеним смеровима, за сваки приступ по једна)



Шта је основни задатак Теорије електричних кола?

- Одредити ел. напоне и струје грана
- Одредити снаге грана и елемената
- Извести у општим бројевима изразе за ел. напоне и струје грана
- Одредити бројчане вредности ел. напона и струја грана
- ***Решити ел. коло*** значи наћи ел. напоне и струје грана, а понекад и снаге грана

Симболичка анализа

Нумеричка анализа

Изоставићемо придев ел.

- Ради бржег и једноставнијег саобраћања изоставићу придев “*електрични*”:
- Напон = Електрични напон
- Струја = Електрична струја
- Коло = Електрично коло
- Мрежа = Електрична мрежа
- Шема = Електрична шема

Изоставићемо математичку строгост

- Појмовна одређења и дефиниције ће бити превасходно **инжењерски** тумачени са гледишта практичне примене.
- У математичким извођењима ћемо се трудити да посматрамо задатак са **физичког** гледишта и гледишта **праксе**, па ће математичка строгост бити изостављена или ублажена.
- Користићемо математичко предзнање стечено на математичким предметима са ранијих година или текуће године.
- Класичне теорије диференцијалних једначина и теорије интегралних трансформација ћемо проширити тако да укључују и посебне концепте – генералисане функције, као што је Диракова делта-функција.
- Рад са генералисаним функцијама ћемо објаснити кроз правила која следеју из ставова (теорема) посебних области математике, Теорије генералисаних функција и Теорије дистрибуција.
- Заинтересовани за ове посебне области могу, на пример, да погледају следеће књиге: И. М. Гельфанд, Г.Е. Шилов, *Обобщенные функции*, Выпуск 1, 2, 3, Государственное издательство физико-математической литературы, Москва, СССР, 1959. Laurent Schwartz, *Théorie des distributions*, Hermann, Paris, France, 1966.

Питања (1)

- Чиме се бави Теорија електричних кола?
- Шта је моделовање а шта је модел?
- Како се физичка тродимензионална направа пресликава у апстрактно електрично коло?
- Шта је елемент електричног кола?
- Које су основне претпоставке за установљавање електричног елемента?
- Шта је терминал?
- Шта је приступ?
- Шта су стандардни референтни смерови напона и струје приступа?
- Како се образују приступи елемента са три краја?
- Шта су примар и секундар?

Питања (2)

- Дефинисати електрично коло.
- Шта је чвор електричног кола?
- Како се дефинише мрежа?
- Шта је граф а шта усмерени граф електричног кола?
- Шта је грана?
- Шта је пут а шта контура?
- Дефинисати повезан граф.
- Шта је субграф?
- Дефинисати стабло.
- Шта је спојница?

Питања (3)

- Шта је фундаментална контура?
- Дефинисати пресек, сноп и чворни пресек.
- Шта је фундаменталан пресек?
- Колико грана има стабло повезаног графа?
- Колико спојница има повезан граф?
- Колико ф-контура има повезан граф?
- Колико ф-пресека има повезан граф?
- Исказати КЗС и КЗН.
- Како бирамо контуре и пресеке за постављање КЗ?
- Шта је снага гране, а шта снага елемента?

Питања (4)

- Шта је снага приступа?
- Исказати Телегенов став.
- Шта су једначине елемента (карактеристике елемента, дефиниционе/конститутивне једначине елемента)?
- Шта су вредности (параметри) елемента?
- Шта су линеарни елементи?
- Шта су временски независни елементи?
- Шта су отпорнички елементи?
- Шта су динамички елементи?
- Који елементи су капацитивни а који индуктивни?
- Шта су зависни извори (контролисани генератори)?

Питања (5)

- Нацртати шеме и написати једначине зависних извора.
- Шта је упоредни чвор?
- Шта је операциони појачавач?
- Шта је мемристор?
- Које елементе са два приступа знате?
- Које елементе са три приступа знате?
- Шта су сингуларни елементи?
- Шта је концентрисан елемент?
- Шта је основни задатак Теорије електричних кола?
- Која је примена Теорије електричних кола?

Питања (6)

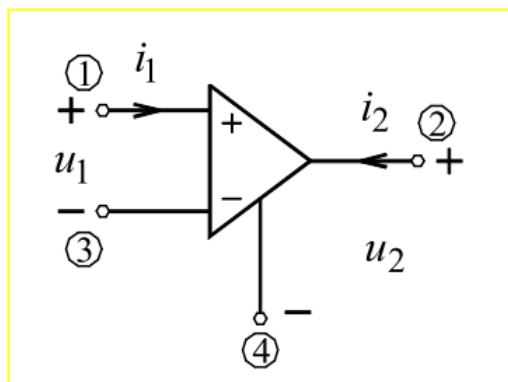
(3) Идеалан трансформатор је

- (а) динамички елемент,
- (б) елемент са губицима,
- (в) елемент без губитака,
- (г) активан елемент ?

(5) Шта су линеарни елементи?

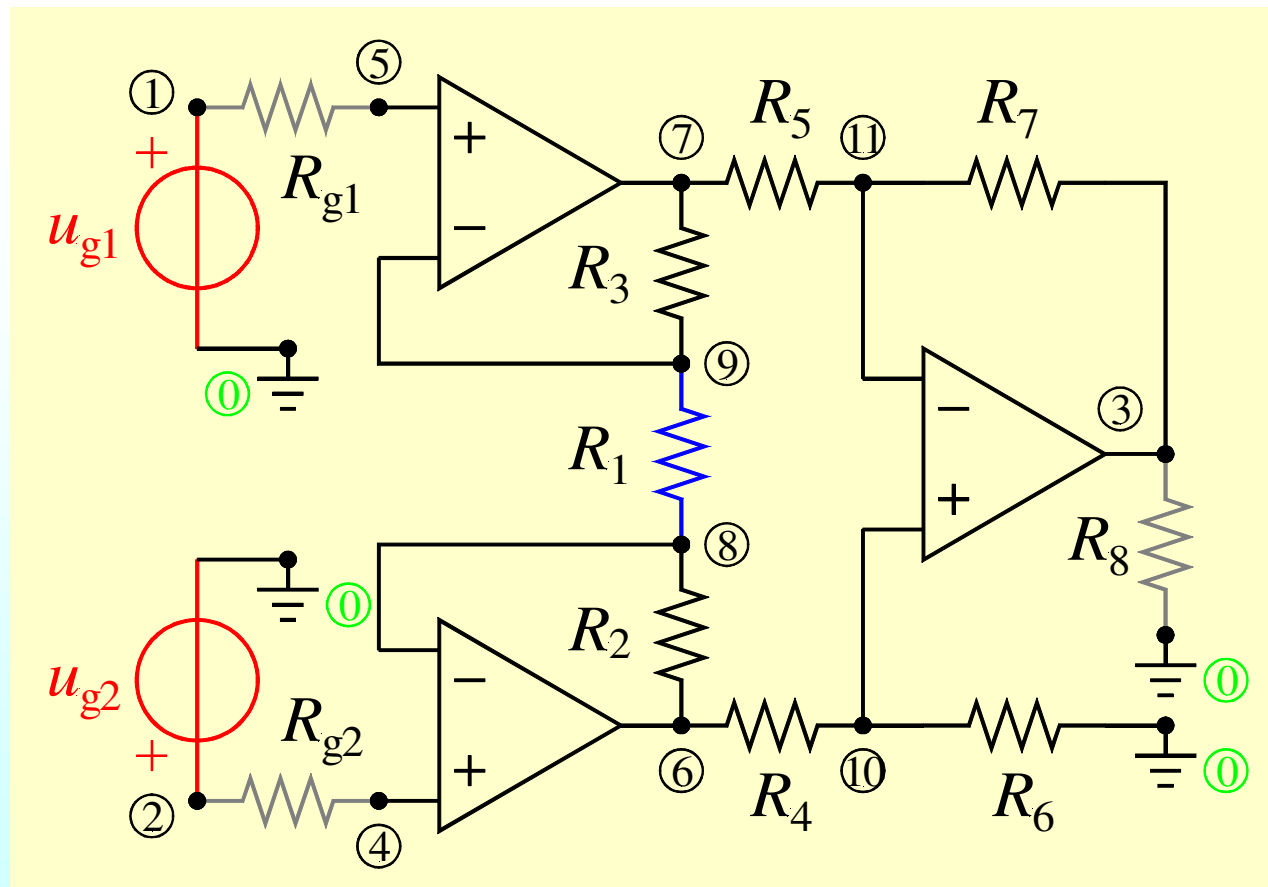
Шта су временски независни елементи?

(4) Једначине операционог појачавача (карактеристике елемента, конститутивне једначине, дефиниционе једначине) су



- (а) $i_1 = 0$, $i_2 = 0$,
- (б) $i_1 = 0$, $u_1 = 0$,
- (в) $i_1 = 0$, $u_2 = 0$,
- (г) $u_1 = 0$, $i_2 = 0$,
- (д) $u_1 = 0$, $u_2 = 0$,
- (ђ) $u_2 = 0$, $i_2 = 0$?

Инструментациони појачавач



Инструментациони појачавач се користи у мерној и медицинској електронској опреми када је потребно појачавати сигнал мале снаге и амплитуде, као што је ЕКГ сигнал.

WolframAlpha

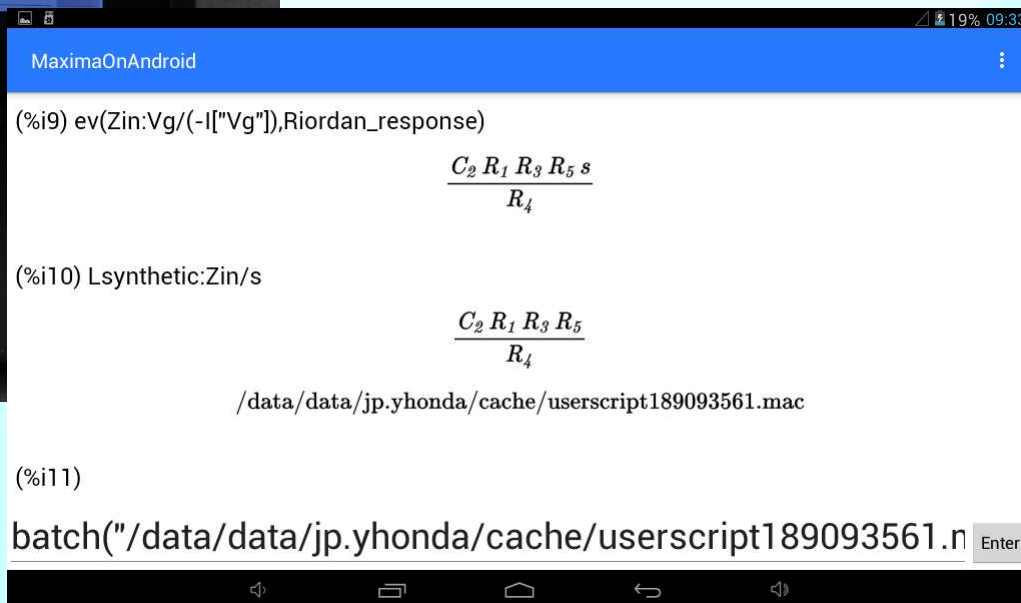
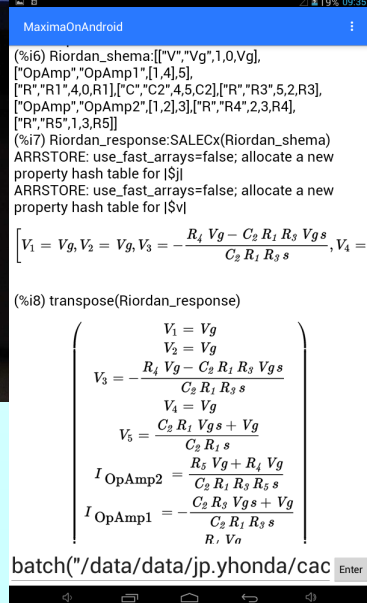
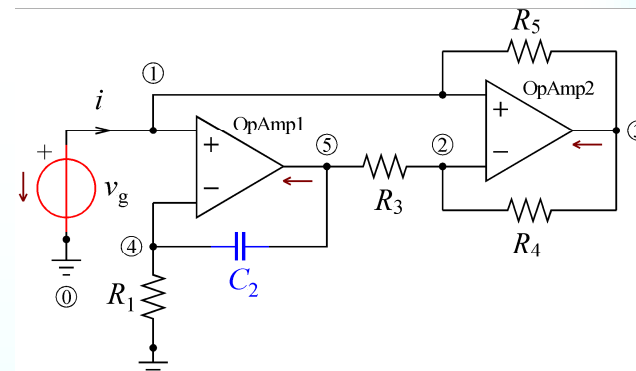
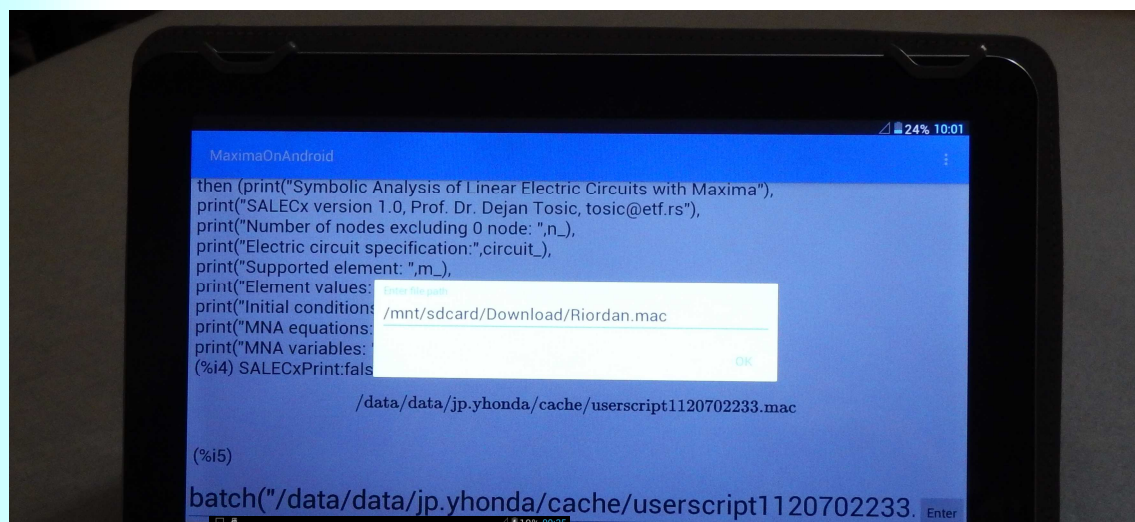
The screenshot shows the WolframAlpha web interface. The browser's address bar displays the URL `https://www.wolframalpha.com/input/?i=Integrate[(a*x+b)*Exp[c*x],x]`. The search bar contains the input `Integrate[(a*x+b)*Exp[c*x],x]`. Below the search bar, the results are displayed in several sections:

- Indefinite integral:**
$$\int (a x + b) \exp(c x) dx = \frac{e^{c x} (a (c x - 1) + b c)}{c^2} + \text{constant}$$
- Alternate form of the integral:**
$$\frac{e^{c x} (a c x - a + b c)}{c^2} + \text{constant}$$
- Expanded form of the integral:**
$$-\frac{a e^{c x}}{c^2} + \frac{a x e^{c x}}{c} + \frac{b e^{c x}}{c} + \text{constant}$$
- Series expansion of the integral at x=0:**
$$\frac{b c - a}{c^2} + b x + \frac{1}{2} x^2 (a + b c) + \frac{1}{6} c x^3 (2 a + b c) + \frac{1}{24} c^2 x^4 (3 a + b c) + O(x^5)$$

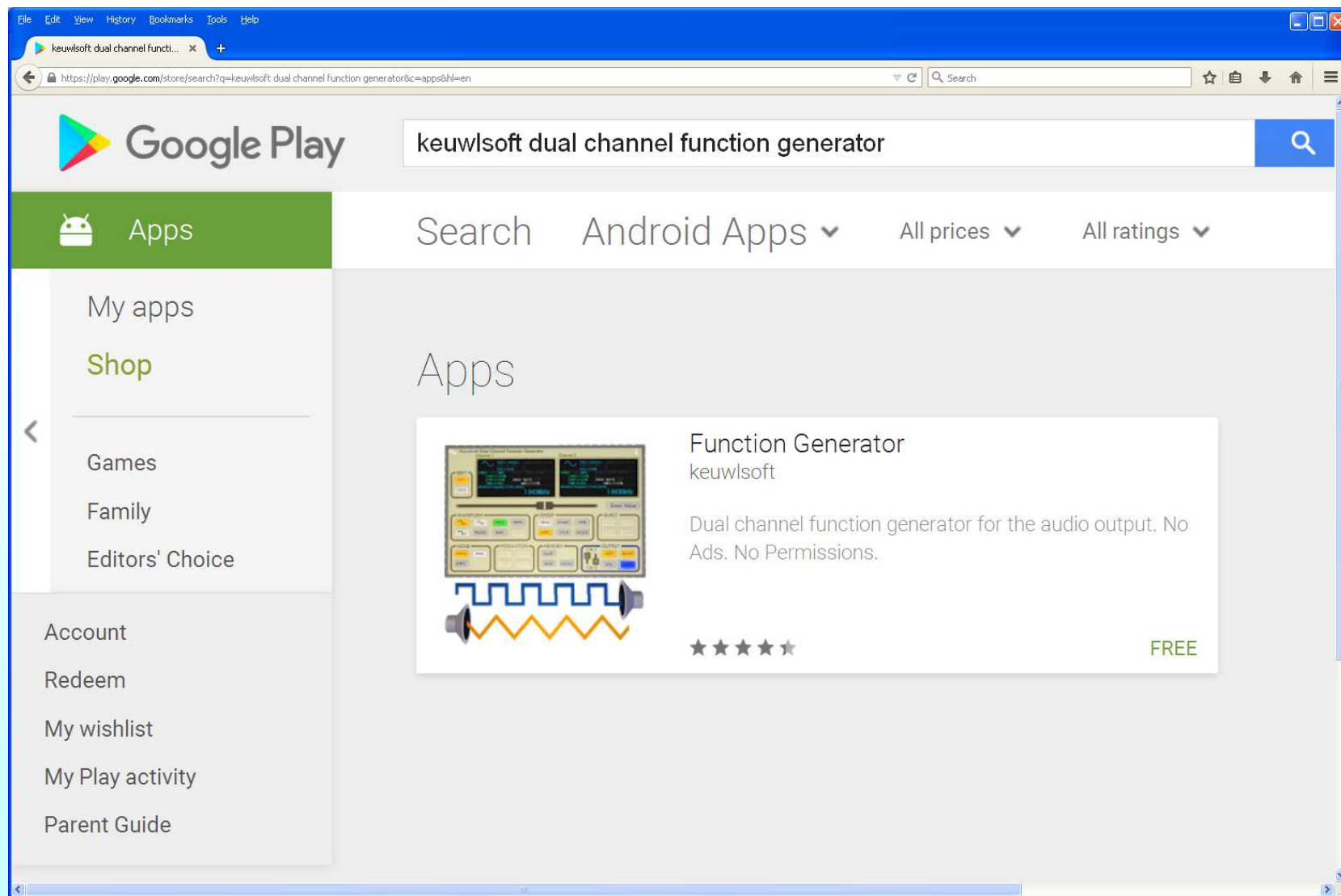
(Taylor series)

On the right side of the interface, there are two promotional banners: "DISCOVER WHAT'S POSSIBLE with Wolfram|Alpha" with a "Take the Tour" button, and "Wolfram Problem Generator". At the bottom, an orange banner reads "Instantly go further. Continue your computation in the Wolfram Cloud »".

Maxima on Android



Function Generator



Leonhard Euler 1707–1783



Родоначелник теорије графова. Рођен у Базелу, Швајцарска.

Gustav Kirchhoff 1824–1887



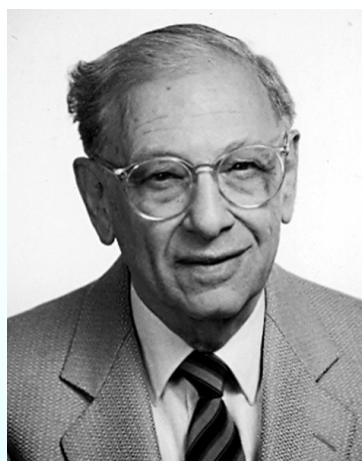
Поставио основне законе електричних кола.
Рођен у Königsberg, Пруска, сада
Калининград, Российская Федерация.

Bernard D. H. Tellegen 1900–1990



Исказао став о снагама електричних кола.
Измислио је електронску цев пентоду и
предложио електрични елемент жиратор.
Рођен у Winschoten, Холандија.

Herbert J. Carlin 1917–2009



Увео је сингуларне елементе електричних кола.
IEEE Life Fellow. Рођен у New York City, USA.