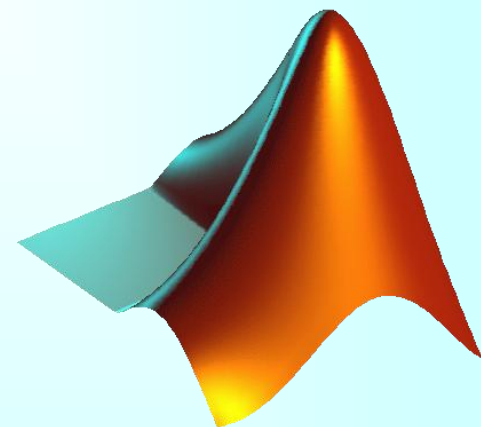
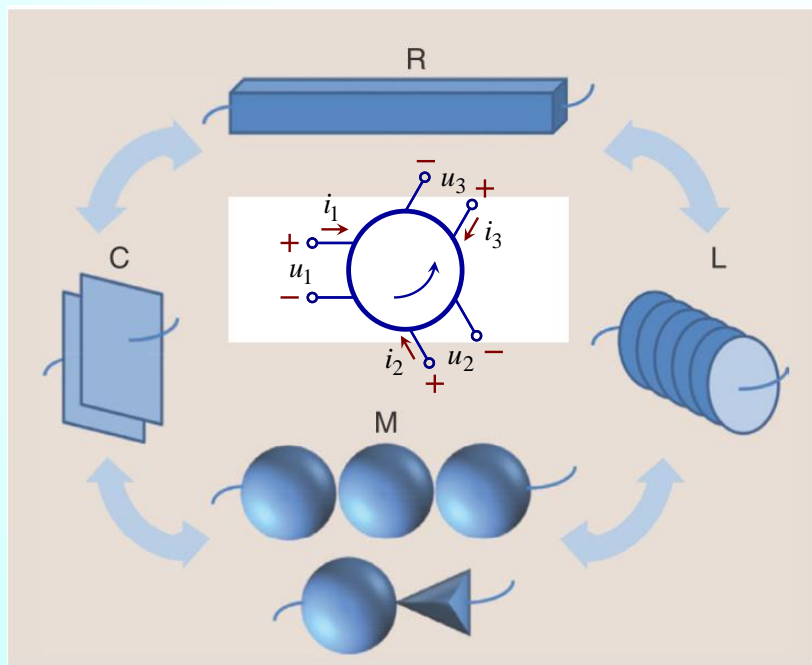


# Практикум из рачунарске анализе кола

## 6. Лапласова трансформација. Водови.



Милка Потребих Иваниш

Никола Баста

# Налажење одзива ел. кола коришћењем Лапласове трансформације

$$\underline{U}(s) = \int_{0^-}^{\infty} u(t) e^{-st} dt$$

$$u(t) = \frac{1}{j2\pi} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} \underline{U}(s) e^{st} ds$$

$\delta(t)$	$1$
$1$	$\frac{1}{s}$
$t$	$\frac{1}{s^2}$
$e^{-at}$	$\frac{1}{a+s}$
$\sin(bt)$	$\frac{b}{b^2+s^2}$
$\cos(bt)$	$\frac{s}{b^2+s^2}$

# Одзив на побуду и сакупљену енергију

Вредности елемената електричног кола са слике су познате.

Побуда (екситација, стимулус, инпут) је

$$u_g(t) = U_m \sin(\omega t) \vartheta(t).$$

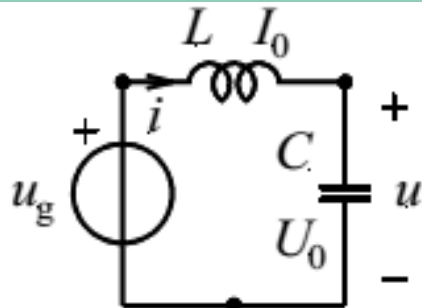
$\vartheta(t)$  је јединична одскочна функција (Хевисајдова функција) која се обележава и са  $h(t)$ .

Почетна струја калема и почетни напон кондензатора су

$$i(t_0^-) = I_0, u(t_0^-) = U_0, t_0 = 0.$$

Постоји веза параметара

$$C = \frac{1}{\omega^2 L}.$$



Одредити напон кондензатора  $u$  и нацртати његов график у функцији времена за  $t > t_0$ .

# Једначине, одзив,... у КОМПЛЕКСНОМ ДОМЕНУ

## Veze izmedju elemenata

```
clear variables
syms omega L C w
w = omega
```

$$w = \omega$$

$$C = 1/(L * w^2)$$

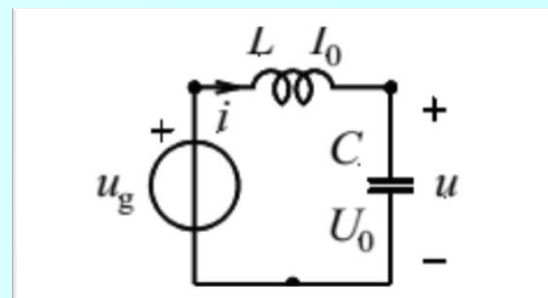
$$C = \frac{1}{L \omega^2}$$

## Pobuda

```
syms Um s t
Ug = laplace(Um * sin(w*t), t, s)
```

$$Ug = \frac{Um \omega}{\omega^2 + s^2}$$

laplace, solve...



odziv.UC

$$\text{ans} = \frac{I_0 L \omega^4 + Um \omega^3 + I_0 L \omega^2 s^2 + U_0 \omega^2 s + U_0 s^3}{(\omega^2 + s^2)^2}$$

## Jednacinе

```
syms I0 IL U0 UC
jedinacine = [Ug == L * (s*IL - I0) + UC, IL == C*(-U0 + s*UC)]
```

$$\text{jedinacine} = \left( \frac{Um \omega}{\omega^2 + s^2} = UC - L (I_0 - IL s) \quad IL = -\frac{U_0 - UC s}{L \omega^2} \right)$$

```
odziv = solve(jedinacine, [UC, IL])
```

**MATLAB: Symbolic Toolbox**

```
odziv = struct with fields:
```

$$UC: (I_0 * L * \omega^4 + Um * \omega^3 + I_0 * L * \omega^2 * s^2 + U_0 * \omega^2 * s + U_0 * s^3) / (\omega^2 + s^2)$$

$$IL: (I_0 * L * \omega^2 * s - U_0 * \omega^2 + Um * \omega * s + I_0 * L * s^3 - U_0 * s^2) / (L * (\omega^2 + s^2)^2)$$

# Одзив у временском домену

## ilaplace, fplot

### Inverzna Laplasova transformacija

```
syms uC(t)
```

```
uC(t) = ilaplace(odziv.UC, s, t)
```

$$uC(t) = U_0 \cos(\omega t) + \frac{Um (\sin(\omega t) - \omega t \cos(\omega t))}{2} + I_0 L \omega \sin(\omega t)$$

```
vrednosti = [I0 == 0.2, L == 0.1, U0 == 2, Um == 2, w == 2*pi*50]
```

```
vrednosti =
```

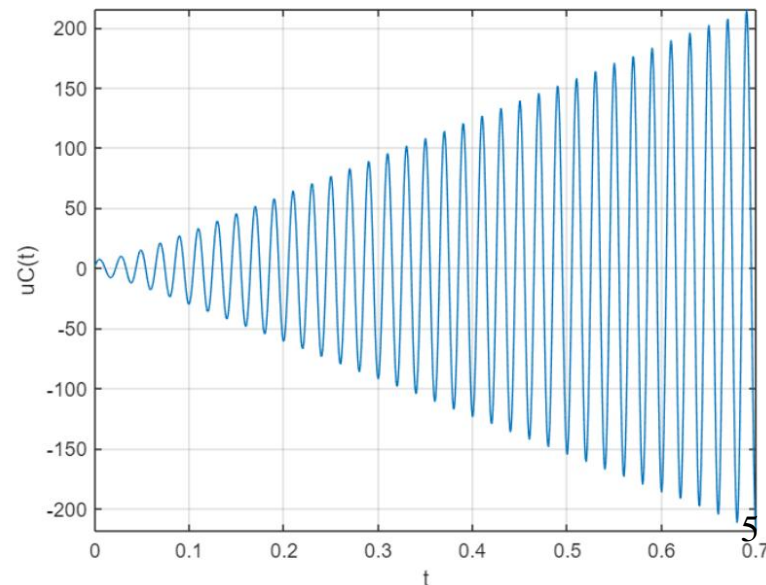
$$\left( I_0 = \frac{1}{5} \quad L = \frac{1}{10} \quad U_0 = 2 \quad Um = 2 \quad \omega = 100\pi \right)$$

```
uC_num(t) = subs(uC(t), lhs(vrednosti), rhs(vrednosti))
```

```
uC_num(t) = 2 cos(100 pi t) + sin(100 pi t) + 2 pi sin(100 pi t) - 100 pi t cos(100 pi t)
```

### Crtanje grafika

```
fplot(t, uC_num(t), [0, 0.7])  
xlabel('t');  
ylabel('uC(t)');  
grid on;
```



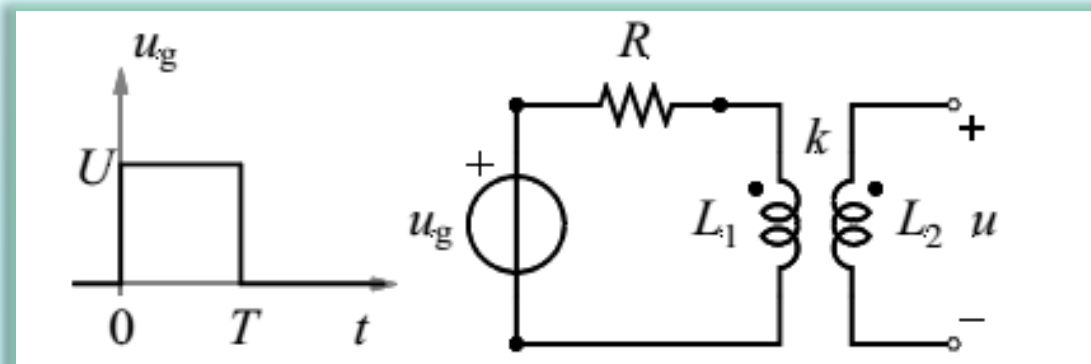
# Одзив на побуду у облику правоугаоног импулса

Вредности елемената електричног кола са слике су познате.

(а) Одредити једначину одзива за напон  $u(t)$ .

(б) Одредити напон  $u(t)$  ако је  $L_1 = L$ ,  $L_2 = 4L$ ,  $k = \frac{1}{2}$ , ако је побуда описана графиком са слике и ако постоји веза  $L = RT$ .

(в) Нацртати график одређеног напона у функцији времена.



# Једначине, одзив,... у КОМПЛЕКСНОМ ДОМЕНУ

```
clear variables
syms L1 L12 L2 R T Ug
assume(0 < R & 0 < L1 & 0 < L12 & 0 < L2 & Ug ~= 0 & 0 < T)
```

## Jednacinе

```
syms I1 I2 U1 U2 k s
jednacinе = subs([Ug == R*I1 + U1, U1 == L1*s*I1 + L12*s*I2, U2 == L12*s*I1 + L2*s*I2, I2 == sym(0)], L12, k*sqrt(L1*L2))
```

$$\text{jednacinе} = (Ug = U_1 + I_1 R \quad U_1 = I_1 L_1 s + I_2 \sqrt{L_1} \sqrt{L_2} k s \quad U_2 = I_2 L_2 s + I_1 \sqrt{L_1} \sqrt{L_2} k s \quad I_2 = 0)$$

```
syms L U t
zamena = subs([L1 == L, L2 == 4*L, k == sym(1/2), Ug == laplace(U*(heaviside(t) - heaviside(t - T)), t, s)], L, R*T)
```

$$\text{zamena} = \left( L_1 = RT \quad L_2 = 4RT \quad k = \frac{1}{2} \quad Ug = -U \left( \frac{e^{-Ts}}{s} - \frac{1}{s} \right) \right)$$

```
odziv = solve(jednacinе, [I1, I2, U1, U2])
```

odziv = *struct with fields:*

$$I1: Ug/(R + L1*s)$$

$$I2: 0$$

$$U1: (L1*Ug*s)/(R + L1*s)$$

$$U2: (L1^{(1/2)}*L2^{(1/2)}*Ug*k*s)/(R + L1*s)$$

```
U2_zamena = simplify(subs(odziv.U2, lhs(zamena), rhs(zamena)))
```

$$U2\_zamena = -\frac{TU(e^{-Ts} - 1)}{Ts + 1}$$

# Одзив у временском домену

## Inverzna Laplasova transformacija

```
syms u2(t)
u2(t) = ilaplace(U2_zamena, s, t)
```

$$u2(t) = U e^{-\frac{t}{T}} - U e^{\frac{T-t}{T}} \text{heaviside}(t - T)$$

```
vrednosti = unique([U == sym(1), T == sym(1)])
```

$$\text{vrednosti} = (T = 1 \quad U = 1)$$

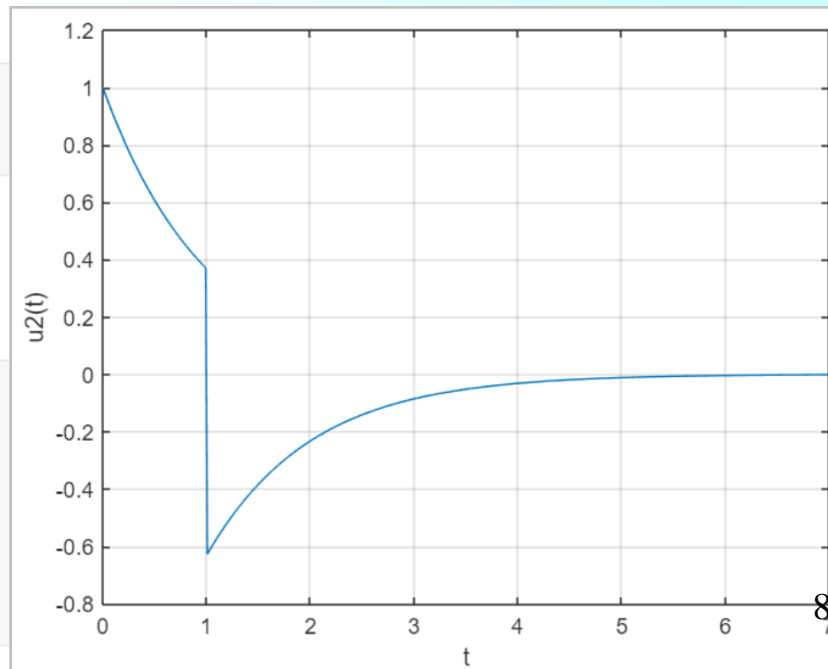
```
u2_num(t) = subs(u2(t), lhs(vrednosti), rhs(vrednosti))
```

$$u2\_num(t) = e^{-t} - \text{heaviside}(t - 1) e^{1-t}$$

## Crtanje grafika

```
fplot(t, u2_num(t), [0, 7])
ylim([-0.8, 1.2]);
grid on;
xlabel('t')
ylabel('u2(t)')
```

MATLAB: Symbolic Toolbox





# Одзив на сакупљену енергију

## Задатак 1

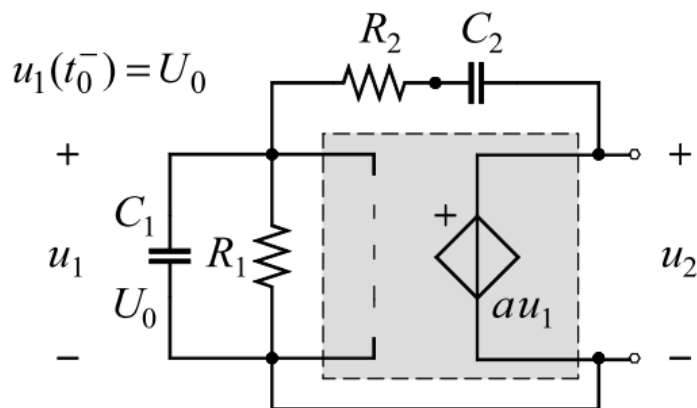
Вредности елемената електричног кола са слике су познате.

$$R_1 = R_2 = R, \quad a = 3, \quad C_1 = C_2 = C, \quad t_0 = 0.$$

(5) Одредити једначине стања у матричном облику.

(5) Одредити напон  $u_2$  за  $t > t_0$ .

(5) Нацртати график  $u_2$  у функцији времена за  $t > t_0$ .



Једначине стања у матричном облику су

Напон  $u_2$  за  $t > t_0$  је

График  $u_2$  у функцији времена за  $t > t_0$  је

# Једначине у комплексном домену

```
clear variables
syms C1 C2 R1 R2 U0 a
assume(0 < R1 & 0 < R2 & 0 < C1 & 0 < C2 & 0 < U0 & 0 < a)
```

## Jednacine

```
syms C R
zamene = [R1 == R, R2 == R, C1 == C, C2 == C, a == sym(3)]
```

```
zamene = (R1 = R R2 = R C1 = C C2 = C a = 3)
```

```
vrednosti = [R == sym(1), C == sym(1), U0 == sym(10)]
```

```
vrednosti = (R = 1 C = 1 U0 = 10)
```

```
syms J U1 U2 V2 s
jednacine = subs([C1*(s*U1 - U0) + U1/R1 + (U1 - V2)/R2 == sym(0), ...
    -((U1 - V2)/R2) + C2*s*(V2 - U2) == sym(0), ...
    J - C2*s*(V2 - U2) == sym(0), U2 == a*U1], ...
    lhs(zamene), rhs(zamene))
```

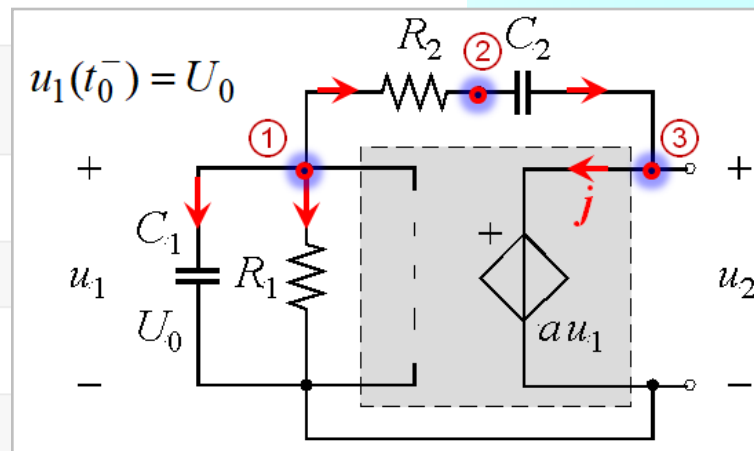
```
jednacine =

$$\left( \frac{U_1}{R} + \frac{U_1 - V_2}{R} - C (U_0 - U_1 s) = 0 \quad -\frac{U_1 - V_2}{R} - C s (U_2 - V_2) = 0 \quad J + C s (U_2 - V_2) = 0 \quad U_2 = 3 U_1 \right)$$

```

```
promenljive = unique([U1, V2, U2, J])
```

```
promenljive = (J U1 U2 V2)
```



# Одзив у временском домену

## Resenje jednacina

```
odziv = solve(jednacine, promenljive)
```

odziv = *struct with fields:*

```
J: -(2*C^2*R*U0*s)/(C^2*R^2*s^2 + 1)
U1: (C*R*U0*(C*R*s + 1))/(C^2*R^2*s^2 + 1)
U2: (3*C*R*U0*(C*R*s + 1))/(C^2*R^2*s^2 + 1)
V2: (C*R*U0*(3*C*R*s + 1))/(C^2*R^2*s^2 + 1)
```

odziv.U2

```
ans =
  3 C R U_0 (C R s + 1)
  -----
  C^2 R^2 s^2 + 1
```

```
syms u2(t)
u2(t) = ilaplace(odziv.U2, s, t)
```

```
u2(t) =
  3 U_0 cos(t/(C R)) + 3 U_0 sin(t/(C R))
```

```
simplify(u2(t))
```

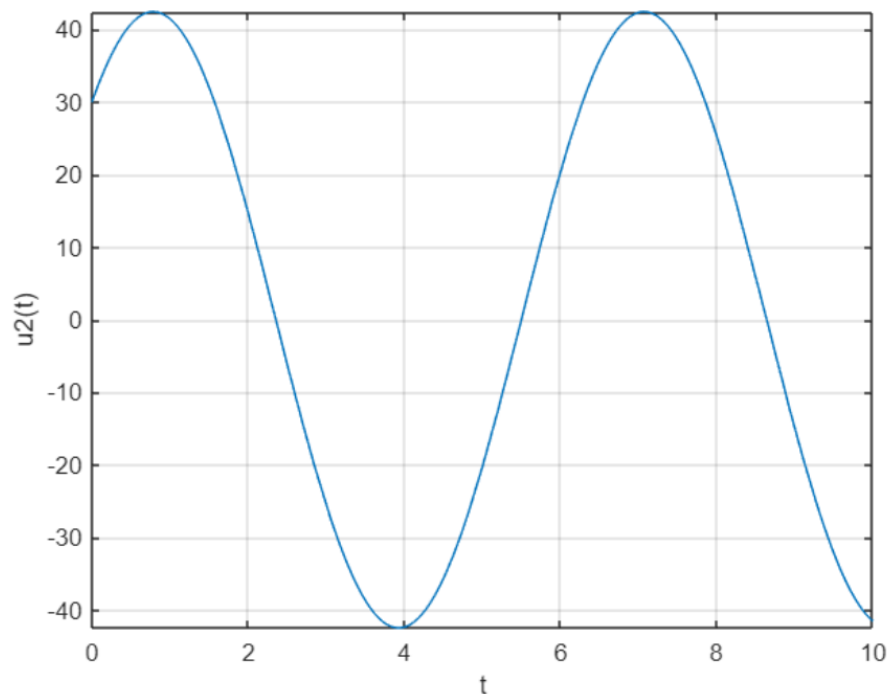
```
ans =
  3 sqrt(2) U_0 cos(pi/4 - t/(C R))
```

```
u2_num(t) = subs(u2(t), lhs(vrednosti), rhs(vrednosti))
```

```
u2_num(t) = 30 cos(t) + 30 sin(t)
```

## Crtanje grafika

```
fplot(t, u2_num(t), [0, 10])
xlabel('t');
ylabel('u2(t)');
grid on;
```



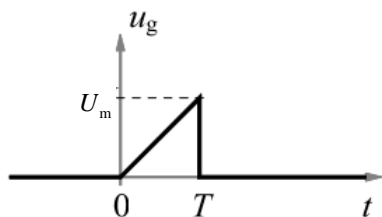
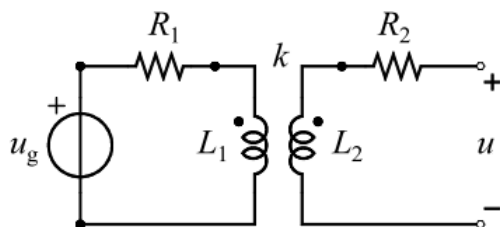
# Одзив на троугаони импулс

## Задатак 2

Параметри електричног кола са слике су познати. Побуда је дата на слици,  $T = L/R$ ,  $R_1 = R$ ,  $R_2 = 2R$ ,  $L_1 = L$ ,  $L_2 = 4L$ ,  $k = 1/2$ .

(5) Одредити индициону функцију за напон отвореног секундара (одскочни одзив).

(5) Одредити напон отвореног секундара и (5) нацртати његов график. Обележити осе графика, координатни почетак, пресеке и додире графика са осама, и тачке екстремума.



Индициона функција (одскочни одзив) је

Напон отвореног секундара је

График напона отвореног секундара је

# Једначине и одзив у комплексном домену

```
clear variables
syms L L1 L2 R R1 R2 T Ug
assume(0 < R1 & 0 < R2 & 0 < R & 0 < L1 & 0 < L2 & 0 < L12 & 0 < L & 0 < T & Ug ~= 0)
```

## Jednacine

```
syms k
zamene = [R1 == R, R2 == 2*R, L1 == L, L2 == 4*L, k == 1/2, T == L/R]
```

```
zamene =
( R1 = R  R2 = 2 R  L1 = L  L2 = 4 L  k = 1/2  T = L/R )
```

```
syms U_m
vrednosti = [R == 1, L == 1, T == 1, U_m == 1]
```

```
vrednosti = (R = 1  L = 1  T = 1  U_m = 1)
```

```
syms I1 I2 U s
jednacine = subs(subs([Ug == R1*I1 + L1*s*I1 + L12*s*I2, U == R2*I2 + L12*s*I1 + L2*s*I2, I2 == 0], L12, k*sqrt(L1*L2)), lhs(zamene), rhs(zamene))
```

```
jednacine =
( Ug = I1 R + I1 L s + (I2 sqrt(L) s sqrt(4 L)) / 2  U = 2 I2 R + 4 I2 L s + (I1 sqrt(L) s sqrt(4 L)) / 2  I2 = 0 )
```

```
promenljive = [I1, I2, U]
```

```
promenljive = (I1  I2  U)
```

## Resenje jednacina

```
odziv = solve(jednacine, promenljive)
```

```
odziv = struct with fields:
```

```
I1: Ug/(R + L*s)
```

```
I2: 0
```

```
U: (L^(1/2)*Ug*s*(4*L)^(1/2))/(2*(R + L*s))
```

# Побуда, одзив у временском одмену

## Transfer funkcija

syms H(s)

H(s) = simplify(odziv.U / Ug)

H(s) =

$$\frac{Ls}{R + Ls}$$

## Indiciona funkcija

syms f(t)

f(t) = ilaplace(H(s)/s, s, t)

f(t) =

$$e^{-\frac{Rt}{L}}$$

## Одзив на сложену побуду

syms f(t)

r(t) = t \* heaviside(t)

r(t) = t heaviside(t)

syms ug(t)

ug(t) = U\_m/T \* r(t) - U\_m/T \* r(t - T) - U\_m\*heaviside(t - T)

ug(t) =

$$\frac{U_m t \text{heaviside}(t)}{T} - U_m \text{heaviside}(t - T) + \frac{U_m \text{heaviside}(t - T) (T - t)}{T}$$

pobudaLT = Ug == laplace(ug(t), t, s)

pobudaLT =

$$Ug = \frac{U_m}{T s^2} - \frac{U_m e^{-Ts}}{s} - \frac{U_m e^{-Ts}}{T s^2}$$

syms U\_1(s)

U\_1(s) = simplify(subs(odziv.U, lhs(pobudaLT), rhs(pobudaLT)))

U\_1(s) =

$$-\frac{L U_m e^{-Ts} (T s - e^{Ts} + 1)}{T s (R + L s)}$$

syms u(t)

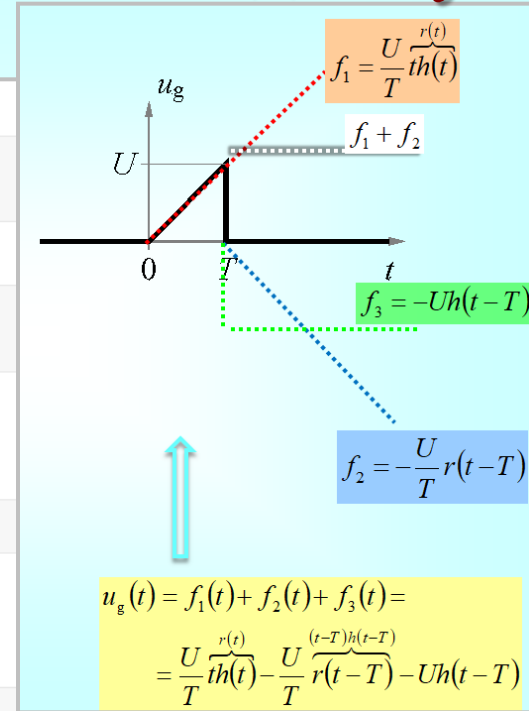
u(t) = ilaplace(U\_1(s), s, t)

u(t) =

$$\frac{L U_m}{RT} - U_m e^{\frac{R(T-t)}{L}} \text{heaviside}(t - T) + \frac{L U_m \text{heaviside}(t - T) \left( \frac{e^{\frac{R(T-t)}{L}}}{R} - \frac{1}{R} \right)}{T} - \frac{L U_m e^{-\frac{Rt}{L}}}{RT}$$

u\_num(t) = simplify(subs(u(t), lhs(vrednosti), rhs(vrednosti)))

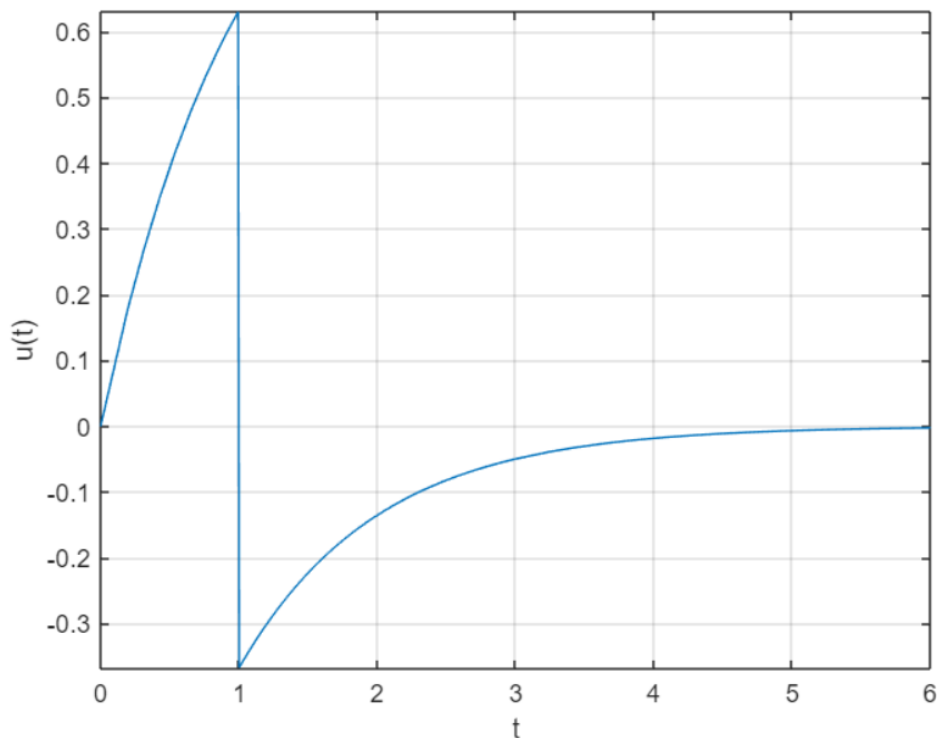
u\_num(t) = 1 - heaviside(t - 1) - e^{-t}



# График решења и део-по-део анализа

## Crtanje grafika

```
fplot(t, u_num(t), [0, 6])  
xlabel('t');  
ylabel('u(t)');  
grid on;
```



## MATLAB: Symbolic Toolbox

### Funkcija napona za razlicite vrednosti t

```
assume((0 < t) < L/R & 0 < L & 0 < R);  
simplify(subs(u(t), lhs(zamene), rhs(zamene)))
```

ans =

$$U_m - U_m e^{-\frac{Rt}{L}}$$

```
assume(L/R < t & 0 < L & 0 < R);  
simplify(subs(u(t), lhs(zamene), rhs(zamene)))
```

ans =

$$-U_m e^{-\frac{Rt}{L}}$$

# Одзив на природне почетне услове

## Задатак 1

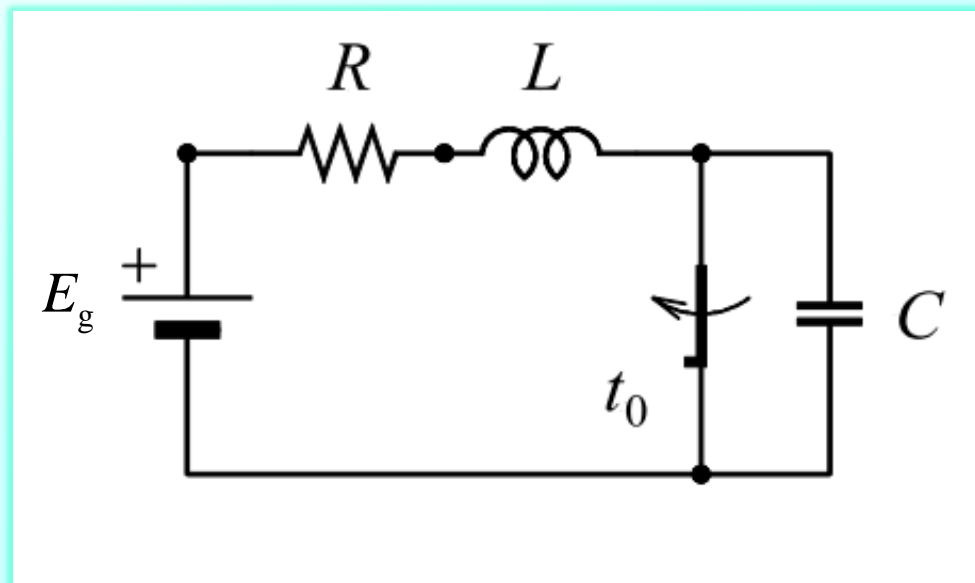
Вредности елемената електричног кола су познате. Прекидач је затворен и одзив је устаљен. У тренутку  $t_0$  прекидач се отвара.

(5) Одредити природне почетне услове у тренутку  $t_0^-$ .

(5) Одредити тренутну вредност напона кондензатора, за  $t \geq t_0$ , ако је  $L = CR^2$ .

(5) Колика је сакупљена (акумулисана) енергија калема када  $t \rightarrow +\infty$ ?

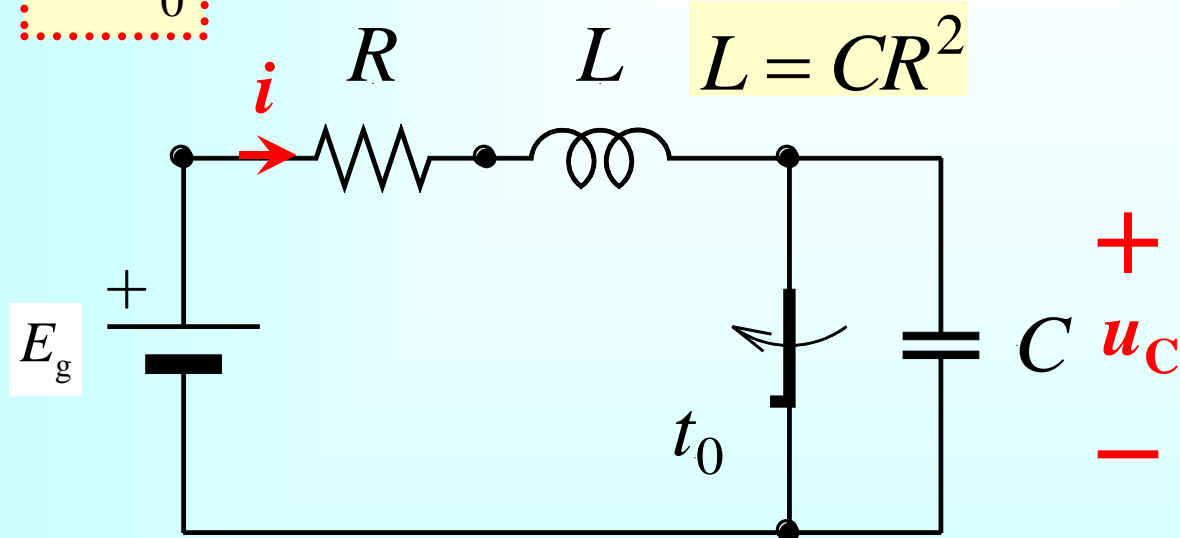
Разматрати општи случај  $t_0 \neq 0$ .





# Природни почетни услови

$t < t_0$



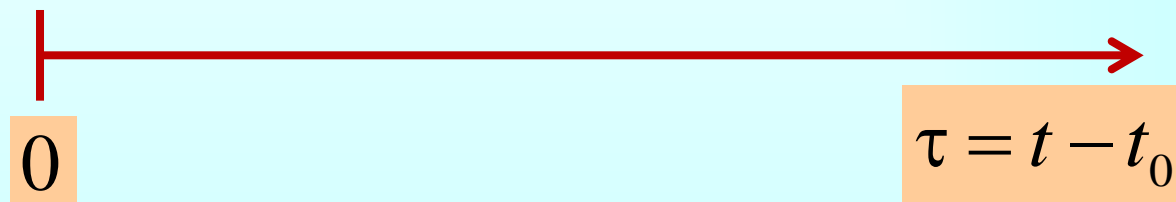
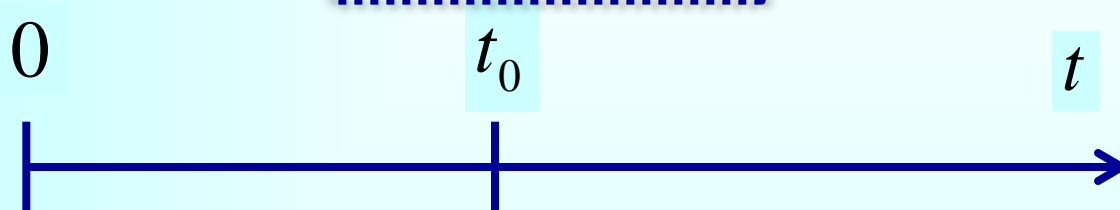
$$u_C(t_0^-) = 0$$

$$i_L(t_0^-) = E_g / R$$

# $\tau$ - нова променљива за време

$$u_C(t_0^-) = 0$$
$$i_L(t_0^-) = E/R$$

Природни почетни  
услови по  
променљивој  $t$



$$u_C(0^-) = 0$$
$$i_L(0^-) = E/R$$

Природни почетни  
услови по  
променљивој  $\tau$

```
clear variables
syms C L R
assume( 0 < R & 0 < L & 0 < C)
```

### Jednacine u s - domenu

```
syms E_g I0 U0
zamene = [L == R^2 * C, U0 == 0, I0 == E_g/R] % pocetni uslovi
```

zamene =

$$\left( L = C R^2 \quad U_0 = 0 \quad I_0 = \frac{E_g}{R} \right)$$

```
syms IC IL UC s
jednacine = [E_g/s == R * IL + L * (s * IL - I0) + UC, IC == IL, IC == C * (s * UC - U0)]
```

jednacine =

$$\left( \frac{E_g}{s} = UC - L (I_0 - IL s) + IL R \quad IC = IL \quad IC = -C (U_0 - UC s) \right)$$

### Resenje jednacina

```
promenljive = [IL, IC, UC]
```

```
promenljive = (IL IC UC)
```

```
odziv = solve(jednacine, promenljive)
```

odziv = *struct with fields:*

IL:  $(C*(E_g - U_0 + I_0*L*s))/(C*L*s^2 + C*R*s + 1)$

IC:  $(C*(E_g - U_0 + I_0*L*s))/(C*L*s^2 + C*R*s + 1)$

UC:  $(E_g + I_0*L*s + C*L*U_0*s^2 + C*R*U_0*s)/(s*(C*L*s^2 + C*R*s + 1))$

# Једначине, одзив у комплексном домену

# Одзив у временском домену

## Vremenski domen

```
syms tau uc(tau)
uc(tau) = ilaplace(subs(odziv.UC, lhs(zamene), rhs(zamene)), s, tau);
```

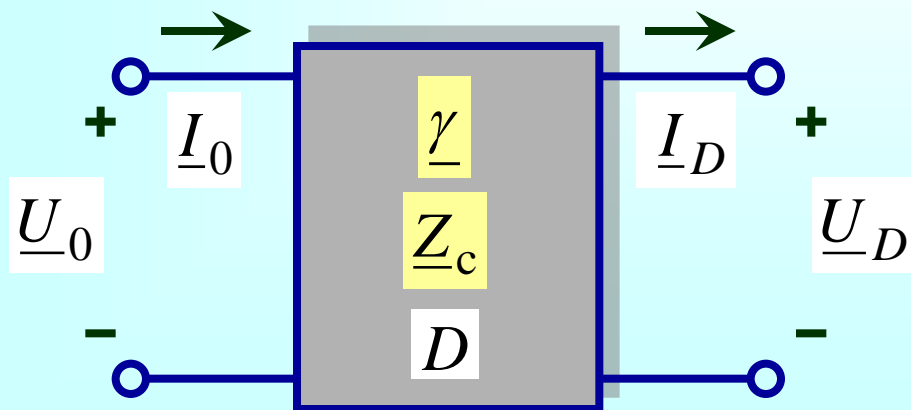
```
syms t t_0
uc(t - t_0)
```

ans =

$$E_g - E_g e^{-\frac{t-t_0}{2CR}} \left( \cos\left(\frac{\sqrt{3}(t-t_0)}{2CR}\right) - \frac{\sqrt{3} \sin\left(\frac{\sqrt{3}(t-t_0)}{2CR}\right)}{3} \right)$$



# Налажење устаљеног простопериодичног одзива у ел. колима са водовима



$$\underline{U}_0 = \cos(\Theta) \underline{U}_D + jZ_c \sin(\Theta) \underline{I}_D$$

$$\underline{I}_0 = jY_c \sin(\Theta) \underline{U}_D + \cos(\Theta) \underline{I}_D$$

# Решавање ел. кола са водовима

Вредности елемената електричног кола су познате.

Подужна капацитивност водова је  $C' = c$  а подужна индуктивност је  $L' = l$ .

$$R_1 = 0.2 R, R_2 = R, R_3 = R,$$

$$l = 4 R^2 c, d_1 = 2 d_2, d_1 \omega \sqrt{c l} = \pi,$$

$$u_g = \sqrt{2} U \sin(\omega t).$$

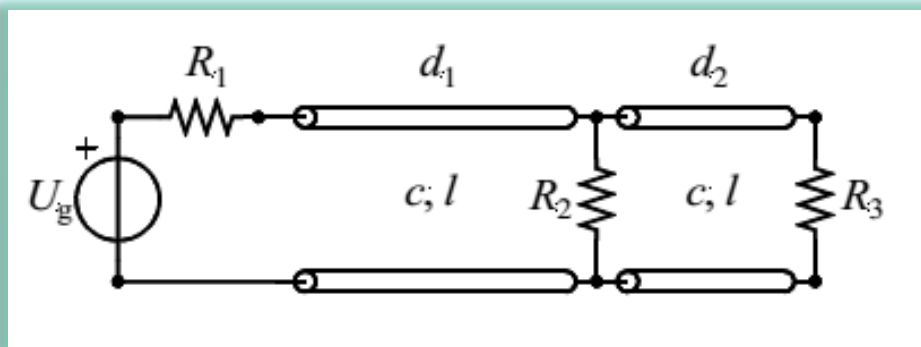
Водови су без губитака.

Одзив је устаљен.

(а) Одредити тренутну вредност струје напонског извора.

(б) Одредити средњу снагу коју напонски извор (напонски генератор) предаје остатку електричног кола.

(в) Колики је коефицијент рефлексije на улазу првог вода?



# Увођење симбола и вредности у КОМПЛЕКСНОМ ДОМЕНУ

## Simboli i vrednosti

```
syms w Theta_1 Theta_2 rho_u1 R U Ug  
assume(0 < R & Ug ~= 0 & 0 < U)
```

```
syms t ug  
pobuda = ug == sqrt(2) * U * sin(w * t)
```

$$pobuda = ug = \sqrt{2} U \sin(t w)$$

```
syms R1 R2 R3 Z_C1 Z_C2  
vrednosti = [R1 == 2*R/10, R2 == R, R3 == R, Z_C1 == 2*R, Z_C2 == 2*R, ...  
Theta_1 == pi, Theta_2 == pi/2, Ug == -1i * U]
```

vrednosti =

$$\left( R_1 = \frac{R}{5} \quad R_2 = R \quad R_3 = R \quad Z_{C1} = 2R \quad Z_{C2} = 2R \quad \Theta_1 = \pi \quad \Theta_2 = \frac{\pi}{2} \quad U_g = -U i \right)$$

# Постављање система једначина

## Resavanje sistema jednacina

```
syms I01 I02 Id1 Id2 U01 U02 Ud1 Ud2
jednacine = [U01 == Ud1 * cos(Theta_1) + 1i * Z_C1 * Id1 * sin(Theta_1), ...
            I01 == 1i * 1/Z_C1 * Ud1 * sin(Theta_1) + Id1 * cos(Theta_1), ...
            U02 == Ud2 * cos(Theta_2) + 1i * Z_C2 * Id2 * sin(Theta_2), ...
            I02 == 1i * 1/Z_C2 * Ud2 * sin(Theta_2) + Id2 * cos(Theta_2), ...
            Ug == R1 * I01 + U01, Id1 == I02 + Ud1/R2, Ud1 == U02, Id2 == Ud2/R3]
```

jednacine =

$$\left( U_{01} = U_{d1} \cos(\Theta_1) + I_{d1} Z_{C1} \sin(\Theta_1) \quad I_{01} = I_{d1} \cos(\Theta_1) + \frac{U_{d1} \sin(\Theta_1)}{Z_{C1}} \quad U_{02} = U_{d2} \cos(\Theta_2) + I_{d2} Z_{C2} \sin(\Theta_2) \quad I_{02} = I_{d2} \cos(\Theta_2) + \frac{U_{d2} \sin(\Theta_2)}{Z_{C2}} \right)$$

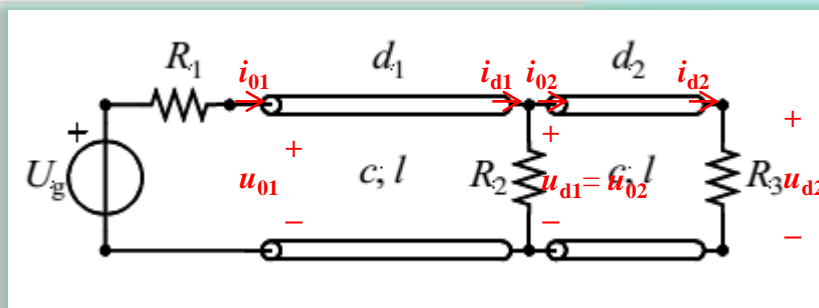
promenljive = [U01, I01, Ud1, Id1, U02, I02, Ud2, Id2]

promenljive = (U01 I01 Ud1 Id1 U02 I02 Ud2 Id2)

odziv = subs(solve(jednacine, promenljive), lhs(vrednosti), rhs(vrednosti))

odziv = struct with fields:

```
U01: -(U*4i)/5
I01: -(U*1i)/R
Ud1: (U*4i)/5
Id1: (U*1i)/R
U02: (U*4i)/5
I02: (U*1i)/(5*R)
Ud2: (2*U)/5
Id2: (2*U)/(5*R)
```





# Одзив у комплексном и временском домену

## Struja generatora

$$I_g = \text{odziv.I01}$$

$$I_g = -\frac{U_i}{R}$$

## Trenutna vrednost struje

```
syms ig(t)
ig(t) = simplify(subs(sqrt(2) * abs(Ig) * cos(w*t + angle(Ig)), lhs(vrednosti), rhs(vrednosti)))
```

$$ig(t) = \frac{\sqrt{2} U \sin(t w)}{R}$$

## Ulazna snaga

```
P = subs(real(Ug * conj(Ig)), lhs(vrednosti), rhs(vrednosti))
```

$$P = \frac{U^2}{R}$$

## Ulazna impedansa

$$Z_{u1} = \text{odziv.U01} / \text{odziv.I01}$$

$$Z_{u1} = \frac{4R}{5}$$

## Ispis ulaznog koeficijenta refleksije

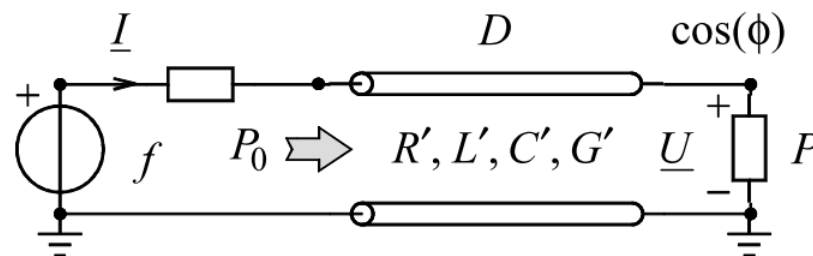
```
subs(rho_u1 == (Zu1 - Z_C1)/(Zu1 + Z_C1), lhs(vrednosti), rhs(vrednosti))
```

$$\text{ans} = \rho_{u1} = -\frac{3}{7}$$

# Електроенергетски вод са губицима

## Задатак 1

Електроенергетски далековод, са губицима услед короне и несавршености изолатора, се може описати водом чији су примарни параметри  $R' = 0.08 \Omega/\text{km}$ ,  $L' = 1.34 \text{ mH}/\text{km}$ ,  $C' = 8.6 \text{ nF}/\text{km}$ ,  $G' = 37.5 \text{ nS}/\text{km}$ . Дужина вода је  $D = 900 \text{ km}$ . Одзив је устаљен и простопериодичан, учестаност је  $f = 50 \text{ Hz}$ . Вод је затворен потрошачем чија је средња (активна) снага  $P = 100 \text{ MW}$ , сачинитељ (фактор) снаге  $\cos(\phi) = 1$  и комплексан напон  $\underline{U} = 220 \text{ kV}$ . Одредити



- (5) комплексну струју генератора
- (5) средњу (активну) снагу на улазу вода
- (5) заменску П-шему вода и вредности њених елемената.



# Параметри вода

```
clear variables
close all
```

Racunanje kompleksne struje generatora i snage na ulazu voda

```
km = 1e3;
Rp = 0.08/km;
Lp = 1.34e-3/km;
Cp = 8.6e-9/km;
Gp = 37.5e-9/km;
D = 900*km;
f = 50;
P = 100e6;
k = 1;
U = 220e3;
```

```
Zc = sqrt((Rp + 1i*2*pi*f*Lp) / (Gp + 1i*2*pi*f*Cp))
```

```
Zc = 3.9673e+02 - 3.4586e+01i
```

```
gamma = sqrt((Rp + 1i*2*pi*f*Lp) * (Gp + 1i*2*pi*f*Cp))
```

```
gamma = 1.0832e-07 + 1.0706e-06i
```

$$\underline{Z}_c = \sqrt{\frac{R' + j\omega L'}{G' + j\omega C'}}$$

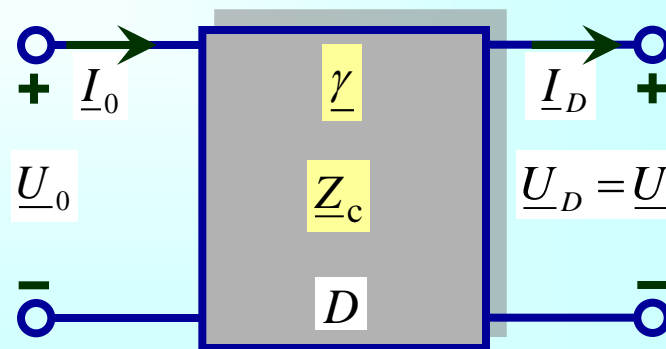
$$\underline{\gamma} = \sqrt{(R' + j\omega L')(G' + j\omega C')} = \alpha + j\beta$$

$$\underline{a}_{11} = \underline{A} = \cosh(\underline{\gamma}D)$$

$$\underline{a}_{12} = \underline{B} = \underline{Z}_c \sinh(\underline{\gamma}D)$$

$$\underline{a}_{21} = \underline{C} = \underline{Y}_c \sinh(\underline{\gamma}D)$$

$$\underline{a}_{22} = \underline{D} = \cosh(\underline{\gamma}D)$$



$$a_{11} = \cosh(\gamma D)$$

$$a_{11} = 0.5734 + 0.0802i$$

$$a_{12} = Z_c \sinh(\gamma D)$$

$$a_{12} = 5.0642e+01 + 3.2541e+02i$$

$$a_{21} = (1/Z_c) \sinh(\gamma D)$$

$$a_{21} = -0.0000 + 0.0021i$$

$$a_{22} = \cosh(\gamma D)$$

$$a_{22} = 0.5734 + 0.0802i$$

$$ID = P/(U*k)$$

$$ID = 454.5455$$

$$U_0 = a_{11} * U + a_{12} * ID$$

$$U_0 = 1.4916e+05 + 1.6556e+05i$$

$$I_0 = a_{21} * U + a_{22} * ID$$

$$I_0 = 2.5169e+02 + 4.9322e+02i$$

# Параметри четворопола, струје, напони, снаге

$$\underline{Z}_c = \sqrt{\frac{R' + j\omega L'}{G' + j\omega C'}}$$

$$\underline{\gamma} = \sqrt{(R' + j\omega L')(G' + j\omega C')} = \alpha + j\beta$$

$$\underline{a}_{11} = \underline{A} = \cosh(\underline{\gamma} D) \quad \underline{a}_{12} = \underline{B} = \underline{Z}_c \sinh(\underline{\gamma} D)$$

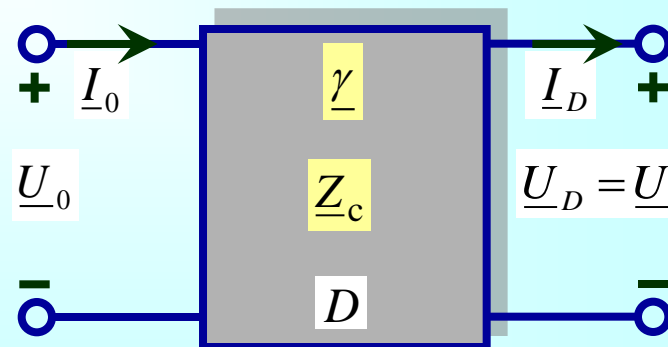
$$\underline{a}_{21} = \underline{C} = \underline{Y}_c \sinh(\underline{\gamma} D) \quad \underline{a}_{22} = \underline{D} = \cosh(\underline{\gamma} D)$$

$$S_0 = U_0 * \text{conj}(I_0)$$

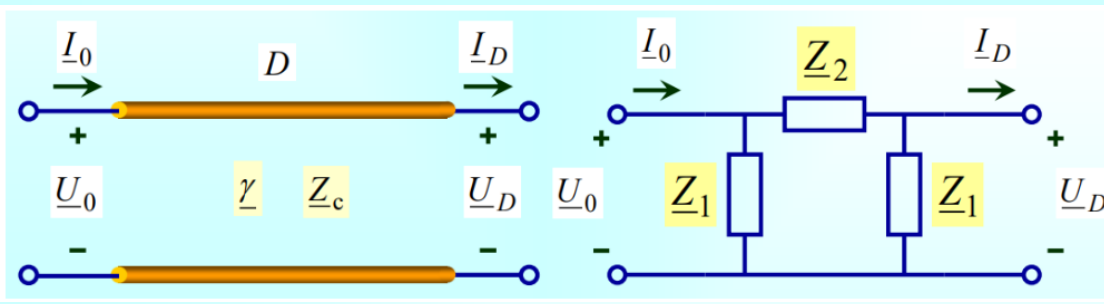
$$S_0 = 1.1920e+08 - 3.1899e+07i$$

$$P_0 = \text{real}(S_0)$$

$$P_0 = 1.1920e+08$$



# Симболично одређивање П-шеме вода



```
syms Zc gamma D Z1 Z2 a11 a12 a21 a22 U0 I0 UD ID
```

```
assume(Z1~=0 & Z2~=0 & a11~=0 & a12~=0)
```

```
jednacine = [U0 == Z2*(ID+UD/Z1) + UD, ...
             I0 == U0/Z1 + (U0-UD)/Z2]
```

jednacine =

$$\left( U_0 = UD + Z_2 \left( ID + \frac{UD}{Z_1} \right) \quad I_0 = \frac{U_0}{Z_1} + \frac{U_0 - UD}{Z_2} \right)$$

```
resenje = solve(jednacine, [U0,I0])
```

resenje = struct with fields:

```
U0: (UD*Z1 + UD*Z2 + ID*Z1*Z2)/Z1
```

```
I0: (2*UD*Z1 + UD*Z2 + ID*Z1^2 + ID*Z1*Z2)/Z1^2
```

```
jed1 = a11 == simplify(subs(resenje.U0/UD, ID,0))
```

jed1 =

$$a_{11} = \frac{Z_1 + Z_2}{Z_1}$$

```
jed2 = a12 == subs(resenje.U0/ID, UD,0)
```

jed2 =  $a_{12} = Z_2$

```
resenjeZ = solve([jed1, jed2], [Z1,Z2])
```

resenjeZ = struct with fields:

```
Z1: a12/(a11 - 1)
```

```
Z2: a12
```

```
Z1 = subs(resenjeZ.Z1, [a11 a12], [cosh(gamma*D) Zc*sinh(gamma*D)])
```

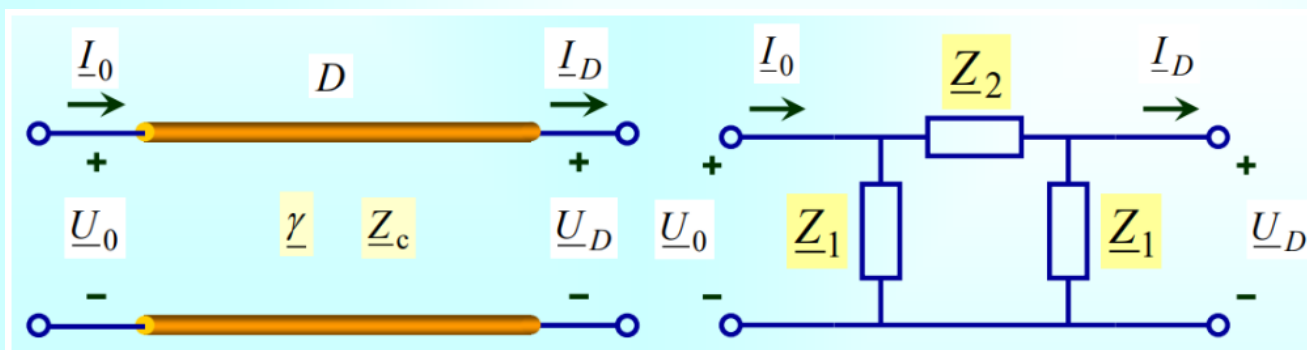
Z1 =

$$\frac{Z_c \sinh(D \gamma)}{\cosh(D \gamma) - 1}$$

```
Z2 = subs(resenjeZ.Z2, [a11 a12], [cosh(gamma*D) Zc*sinh(gamma*D)])
```

Z2 =  $Z_c \sinh(D \gamma)$

# Решење за импедансе у симболичком облику



```
Z1 = subs(resenjeZ.Z1, [a11 a12], [cosh(gamma*D) Zc*sinh(gamma*D)])
```

$$Z_1 = \frac{Z_c \sinh(D \gamma)}{\cosh(D \gamma) - 1}$$

```
Z2 = subs(resenjeZ.Z2, [a11 a12], [cosh(gamma*D) Zc*sinh(gamma*D)])
```

$$Z_2 = Z_c \sinh(D \gamma)$$