Колоквијум из Практикума из рачунарске анализе кола

Колоквијум се ради **са литературом** у електронској форми и траје 60 минута. Колоквијум се оцењује са 50 поена. Подебљани бројеви у загради на почетку реда представљају број поена додељен делу задатка или питању. Није дозвољено напуштање сале 30 минута од почетка колоквијума. Писати искључиво **хемијском** оловком. Коначне одговоре на питања уписати у одговарајуће правоугаонике или уцртати у дијаграме (користити и полеђину). Овај папир се предаје. Попунити податке о кандидату у следећој таблици.

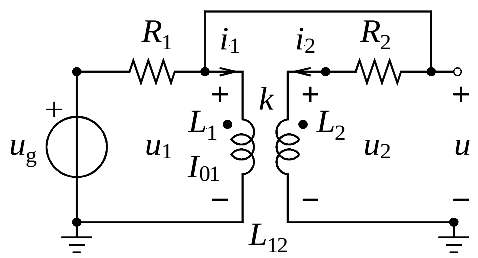
Индекс год./број	Презиме и име	Одсек

З.1а	**З.1б**	**З.1в**	**З.1г**	**З.1д**		К.	Σ	Оцена

Предметни наставник: др *Милка Потребић*, ванредни професор

Задатак 1

Електроенергетски трансформатор је у колу познатих параметара, $R_1 = R$, $R_2 = 2R$, $L_1 = L$, $L_2 = 4L$, $k = \dfrac{1}{2}$, $u_g(t) = U\,\vartheta(t)$, $i_1(t_0^-) = I_{01}$, $t_0 = 0$.



MATLAB MuPAD

З.1а

(10) Одредити једначине стања.

З.1б

(10) Одредити одскочни одзив (индициону функцију) за напон отворене везе u.

З.1в

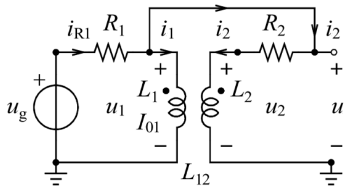
(10) Одредити импулсни одзив (Гринову функцију) за напон отворене везе u.

MATLAB Simulink Simscape

З.1г

(10) Нацртати шему кола (модел) и **(5+5)** графике напона $u(t)$ и струје примара $i_1(t)$, у интервалу времена од 0 до 7 s, за следеће вредности елемената: $R = 0.1\,\Omega$, $L = 0.1\,\mathrm{H}$, $U = 6\,\mathrm{V}$, $I_0 = 10\,\mathrm{A}$.

Поставимо систем једначина кола. То је листа једначина.
Знак једнако се користи за куцање једначине, двотачка-једнако је за доделу.
Прве изводе смо писали као нове променљиве Di1, Di2.




```
jednacineD := [
 iR1 = i1 + i2,
 ug = R1*iR1 + u1,
 u = R2*i2 + u2,
 u1 = L1*Di1 + L12*Di2,
 u2 = L12*Di1 + L2*Di2, u = u1
]
```

$$[\mathrm{iR1} = \mathrm{i1} + \mathrm{i2},\ \mathrm{ug} = \mathrm{u1} + \mathrm{R1}\ \mathrm{iR1},\ u = \mathrm{u2} + \mathrm{R2}\ \mathrm{i2},\ \mathrm{u1} = \mathrm{Di1}\ \mathrm{L1} + \mathrm{Di2}\ \mathrm{L12},\ \mathrm{u2} = \mathrm{Di2}\ \mathrm{L2} + \mathrm{Di1}\ \mathrm{L12},\ u = \mathrm{u1}]$$

Уклонити (елиминисати) све променљиве осим промељивих стања.
Променљиве стања су, по дефиницији, напони кондензатора и струје калемова.
Дефинишимо листу напона и струја које треба уклонити.

```
ukloniti := [iR1, u, u1, u2]
```

$$[\mathrm{iR1},\ u,\ \mathrm{u1},\ \mathrm{u2}]$$

Користимо функцују за уклањање (елиминацију) променљивих.

Она враћа једначине у којима су само променљиве стања. То су струје калемова.

```
jednacineDi12 := groebner::eliminate(jednacineD, ukloniti)
```

$$[\mathrm{R1}\ \mathrm{i1} - \mathrm{ug} + \mathrm{R1}\ \mathrm{i2} + \mathrm{Di1}\ \mathrm{L1} + \mathrm{Di2}\ \mathrm{L12},\ \mathrm{R2}\ \mathrm{i2} - \mathrm{Di1}\ \mathrm{L1} + \mathrm{Di2}\ \mathrm{L2} + \mathrm{Di1}\ \mathrm{L12} - \mathrm{Di2}\ \mathrm{L12}]$$

Једначине које смо добили су изрази који представљају леве стране једнакости.
Десна страна је нула. Добили смо листу оваквих израза - једначина.
Дефинишимо замену вредности елемената сходно задатку.

```
zamena := [L1 = L, L2 = 4*L, L12 = L, R1 = R, R2 = 2*R]
```

$$[\mathrm{L1} = L,\ \mathrm{L2} = 4\,L,\ \mathrm{L12} = L,\ \mathrm{R1} = R,\ \mathrm{R2} = 2\,R]$$

Замена је листа једноставних једначина, раздвојених запетом.
Свака једначина је облика променљива-једнако-вредност.

Једначине стања су једначине по првим изводима променљивих стања
написане у договореном облику (Кошијева нормална форма).
Са леве стране једнакости је извод променљиве стања или нула.
Са десне стране је израз од променљивих стања, параметара и побуда.
Решимо систем једначина по променљивама које представљају изводе.

```
resenjeD := linsolve(jednacineDi12, [Di1, Di2]) | zamena
```

$$\left[\mathrm{Di1} = -\frac{3\,L\,R\,\mathrm{i1} - 3\,L\,\mathrm{ug} + L\,R\,\mathrm{i2}}{3\,L^2},\ \mathrm{Di2} = -\frac{2\,R\,\mathrm{i2}}{3\,L}\right]$$

Решење се може, накада, боље сагледати ако се преуреди функцијом expand.

```
expand(resenjeD)
```

$$\left[\mathrm{Di1} = \frac{\mathrm{ug}}{L} - \frac{R\,\mathrm{i1}}{L} - \frac{R\,\mathrm{i2}}{3\,L},\ \mathrm{Di2} = -\frac{2\,R\,\mathrm{i2}}{3\,L}\right]$$

Да би решили систем једначина стања треба да прилагодимо синтаксу софтверском алату.
Напони и струје треба да буду симболи иза којих је у обичним заградама наведена
променљива од које зависе, а то је време.
Први извод се пише као симбол-апостроф-зависност-од-времена.
Побуду замењујемо према захтеву задатка.

```
vreme := [
 Di1 = i1'(t), Di2 = i2'(t),
 i1 = i1(t), i2 = i2(t),
```

```
 ug = U*heaviside(t)
]
```

$$[\mathrm{Di1} = \mathrm{i1}'(t), \mathrm{Di2} = \mathrm{i2}'(t), \mathrm{i1} = \mathrm{i1}(t), \mathrm{i2} = \mathrm{i2}(t), \mathrm{ug} = U\,\mathrm{heaviside}(t)]$$

Систем једначина стања је записан као листа две диференцијалне једначине.

```
jednacineStanja := resenjeD | vreme
```

$$\left[\mathrm{i1}'(t) = -\frac{3\,L\,R\,\mathrm{i1}(t) + L\,R\,\mathrm{i2}(t) - 3\,L\,U\,\mathrm{heaviside}(t)}{3\,L^2}, \mathrm{i2}'(t) = -\frac{2\,R\,\mathrm{i2}(t)}{3\,L}\right]$$

Да би се добио потпун одзив треба додати почетне услове.
Почетна струја примара је задата. Почетна струја секундара није задата и тада се сматра да је једнака нули.

Функција за решавање система диференцијалних једначина захтева да се једначине, заједно са почетним условима, задају као скуп - помоћу таласастих заграда.
Променљиве у диференцијалним једначинама се такође задају као скуп.

Елементе листе добијамо функцијом op која враћа списак аргумената (операнде).

```
op(jednacineStanja)
```

$$\mathrm{i1}'(t) = -\frac{3\,L\,R\,\mathrm{i1}(t) + L\,R\,\mathrm{i2}(t) - 3\,L\,U\,\mathrm{heaviside}(t)}{3\,L^2}, \mathrm{i2}'(t) = -\frac{2\,R\,\mathrm{i2}(t)}{3\,L}$$

Једначине стања са почетним условима чине систем једначина - скуп.

```
sistemStanja := {
 op(jednacineStanja),
 i1(0) = I0,
 i2(0) = 0
}
```

$$\left\{\mathrm{i1}(0) = \mathrm{I0}, \mathrm{i1}'(t) = -\frac{3\,L\,R\,\mathrm{i1}(t) + L\,R\,\mathrm{i2}(t) - 3\,L\,U\,\mathrm{heaviside}(t)}{3\,L^2}, \mathrm{i2}'(t) = -\frac{2\,R\,\mathrm{i2}(t)}{3\,L}, \mathrm{i2}(0) = 0\right\}$$

Променљиве стања су скуп.

```
promenljiveStanja := {i1(t), i2(t)}
```

$$\{\mathrm{i1}(t), \mathrm{i2}(t)\}$$

Функција која решава диференцијалне једначине и системе је ode::solve.
Решење једначина стања са датим почетним условима је скуп листи.

```
resenjeStanja := ode::solve(sistemStanja, promenljiveStanja)
```

$$\left\{\left[\mathrm{i1}(t) = e^{-\frac{R\,t}{L}}\left(\mathrm{I0} + \frac{U\,\mathrm{heaviside}(t)\left(e^{\frac{R\,t}{L}} - 1\right)}{R}\right), \mathrm{i2}(t) = 0\right]\right\}$$

Електрично коло има јединствено решење, тако да је резултат једночлани скуп.

```
odzivStanja := resenjeStanja[1]
```

$$\left[\mathrm{i1}(t) = e^{-\frac{R\,t}{L}}\left(\mathrm{I0} + \frac{U\,\mathrm{heaviside}(t)\left(e^{\frac{R\,t}{L}} - 1\right)}{R}\right), \mathrm{i2}(t) = 0\right]$$

Такође, може се користити и функција op да се из једночланог скупа извади елемент.

```
op(resenjeStanja)
```

$$\left[\mathrm{i1}(t) = e^{-\frac{R\,t}{L}}\left(\mathrm{I0} + \frac{U\,\mathrm{heaviside}(t)\left(e^{\frac{R\,t}{L}} - 1\right)}{R}\right), \mathrm{i2}(t) = 0\right]$$

Некада је прегледније да се решење представи у развијеном облику без заграда, а то се постиже функцијом expand.

```
expand(odzivStanja)
```

$$\left[\mathrm{i1}(t) = \mathrm{I0}\, e^{-\frac{R\,t}{L}} + \frac{U\,\mathrm{heaviside}(t)}{R} - \frac{U\, e^{-\frac{R\,t}{L}}\,\mathrm{heaviside}(t)}{R}, \mathrm{i2}(t) = 0\right]$$

Како да одредимо остале напоне и струје?
Једноставно. Пођимо од полазних једначина.

```
jednacineD
```

$$[\mathrm{iR1} = \mathrm{i1} + \mathrm{i2}, \mathrm{ug} = \mathrm{u1} + \mathrm{R1}\,\mathrm{iR1}, u = \mathrm{u2} + \mathrm{R2}\,\mathrm{i2}, \mathrm{u1} = \mathrm{Di1}\,\mathrm{L1} + \mathrm{Di2}\,\mathrm{L12}, \mathrm{u2} = \mathrm{Di2}\,\mathrm{L2} + \mathrm{Di1}\,\mathrm{L12}, u = \mathrm{u1}]$$

Уклонимо из њих променљиве које означавају прве изводе променљивих стања.

```
ostaleJednacine := groebner::eliminate(jednacineD, [Di1, Di2])
```

$$[\mathrm{i1} + \mathrm{i2} - \mathrm{iR1}, \mathrm{u2} - u + \mathrm{R2}\,\mathrm{i2}, u - \mathrm{ug} + \mathrm{R1}\,\mathrm{iR1}, \mathrm{u1} - u]$$

Решимо ове једначине по преосталим променљивама, а то су оне које смо раније уклањали.

```
ostaliOdziv := linsolve(ostaleJednacine, ukloniti)
```

$$[\mathrm{iR1} = \mathrm{i1} + \mathrm{i2}, u = \mathrm{ug} - \mathrm{R1}\,\mathrm{i1} - \mathrm{R1}\,\mathrm{i2}, \mathrm{u1} = \mathrm{ug} - \mathrm{R1}\,\mathrm{i1} - \mathrm{R1}\,\mathrm{i2}, \mathrm{u2} = \mathrm{ug} - \mathrm{R1}\,\mathrm{i1} - \mathrm{R1}\,\mathrm{i2} - \mathrm{R2}\,\mathrm{i2}]$$

Уочити да су преостале променљиве алгебарски изрази по променљивама стања.
Заменити у њима променљиве стања са одредницом времена и побуду.

```
ostaliOdzivVreme := ostaliOdziv |
[i1 = i1(t), i2 = i2(t),
 ug = U*heaviside(t),
 R1 = R, R2 = 2*R
]
```

$$[\mathrm{iR1} = \mathrm{i1}(t) + \mathrm{i2}(t), u = U\,\mathrm{heaviside}(t) - R\,\mathrm{i2}(t) - R\,\mathrm{i1}(t), \mathrm{u1} = U\,\mathrm{heaviside}(t) - R\,\mathrm{i2}(t) - R\,\mathrm{i1}(t), \mathrm{u2} = U\,\mathrm{heaviside}(t) - 3\,R\,\mathrm{i2}(t) - R\,\mathrm{i1}(t)]$$

Заменити одређене променљиве стања у решењу за остале променљиве.

```
ostaliOdzivStanje := ostaliOdzivVreme | odzivStanja
```

$$\left[\mathrm{iR1} = e^{-\frac{R\,t}{L}}\left(\mathrm{I0} + \frac{U\,\mathrm{heaviside}(t)\left(e^{\frac{R\,t}{L}} - 1\right)}{R}\right), u = \sigma_1, \mathrm{u1} = \sigma_1, \mathrm{u2} = \sigma_1\right]$$

where

$$\sigma_1 = U\,\mathrm{heaviside}(t) - R\, e^{-\frac{R\,t}{L}}\left(\mathrm{I0} + \frac{U\,\mathrm{heaviside}(t)\left(e^{\frac{R\,t}{L}} - 1\right)}{R}\right)$$

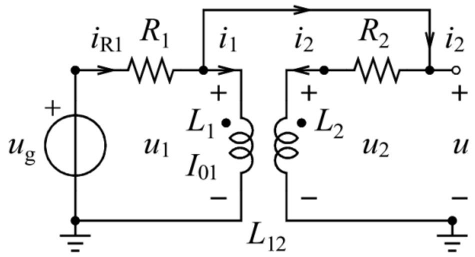
Преуредити решење да буде читљивије или очигледније.

```
ostaliOdzivResenje := expand(ostaliOdzivStanje)
```

$$\left[\mathrm{iR1} = \mathrm{I0}\,e^{-\frac{R\,t}{L}} + \frac{U\,\mathrm{heaviside}(t)}{R} - \frac{U\,e^{-\frac{R\,t}{L}}\,\mathrm{heaviside}(t)}{R},\ u = \sigma_1,\ \mathrm{u1} = \sigma_1,\ \mathrm{u2} = \sigma_1\right]$$

where

$$\sigma_1 = U\,e^{-\frac{R\,t}{L}}\,\mathrm{heaviside}(t) - \mathrm{I0}\,R\,e^{-\frac{R\,t}{L}}$$



Тражени напон је

```
uResenje := u | ostaliOdzivResenje
```

$$U\,e^{-\frac{R\,t}{L}}\,\mathrm{heaviside}(t) - \mathrm{I0}\,R\,e^{-\frac{R\,t}{L}}$$

Колика је струја примара?

```
i1Resenje := expand( i1(t) | odzivStanja )
```

$$\mathrm{I0}\,e^{-\frac{R\,t}{L}} + \frac{U\,\mathrm{heaviside}(t)}{R} - \frac{U\,e^{-\frac{R\,t}{L}}\,\mathrm{heaviside}(t)}{R}$$

Решење се може приказати на, можда, подеснији начин:

```
collect(i1Resenje, heaviside)
```

$$\left(\frac{U}{R} - \frac{U\,e^{-\frac{R\,t}{L}}}{R}\right)\mathrm{heaviside}(t) + \mathrm{I0}\,e^{-\frac{R\,t}{L}}$$

Колика је струја напонског извора?

```
iR1Resenje := iR1 | ostaliOdzivResenje
```

$$\mathrm{I0}\,e^{-\frac{R\,t}{L}} + \frac{U\,\mathrm{heaviside}(t)}{R} - \frac{U\,e^{-\frac{R\,t}{L}}\,\mathrm{heaviside}(t)}{R}$$

```
collect(iR1Resenje, heaviside)
```

$$\left(\frac{U}{R} - \frac{U\,e^{-\frac{R\,t}{L}}}{R}\right)\mathrm{heaviside}(t) + \mathrm{I0}\,e^{-\frac{R\,t}{L}}$$

Нацртати напон u(t),
у интервалу времена од t1 = 0 s до t2 = 7 s,
за следеће вредности елемената:
L = 0.1 H, R = 0.1 Ohm, U = 6 V, I0 = 10 A.

```
vrednostiElemenata := [L = 0.1, R = 0.1, U = 6, I0 = 10]
```

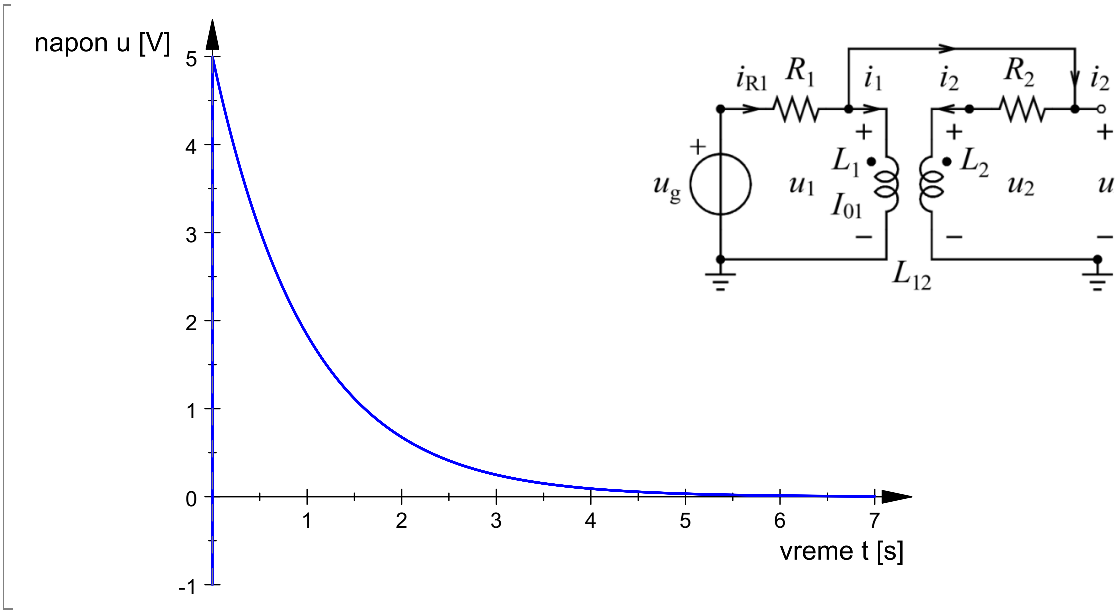
$$[L = 0.1,\ R = 0.1,\ U = 6,\ \mathrm{I0} = 10]$$

Подесити да Хевисајдова функција буде нула у нули.

```
Pref::heavisideAtOrigin(0):
```

На графику напона u(t) обележити осе. Подесити да се црта у 4000 тачака.

```
plot( uResenje | vrednostiElemenata,
t = 0..7, XMesh = 4000,
AxesTitles = ["vreme t [s]", "napon u [V]"] )
```



Симболима, променљивама, напона и струја нису додељиване вредности
зато што их користимо у функцијама за решавање једначина. На пример,
u, u(t) је само симбол напона, а uResenje је израз који представља решење.

```
u(t) = uResenje
```

$$u(t) = U\,\mathrm{e}^{-\frac{R\,t}{L}}\,\mathrm{heaviside}(t) - \mathrm{I0}\,R\,\mathrm{e}^{-\frac{R\,t}{L}}$$

Одскочни одзив за напон u(t) се може одредити из потпуног одзива
зато што је побуда одскочна Хевисајдова. По дефиницији, одскочнои одзив је
одзив за дати напом или струју, у колу без почетне енергије, у коме делује један извор,
чија је побуда јединична одскочна функција.

```
uOdskocniOdziv := uResenje | [I0 = 0, U = 1]
```

$$\mathrm{e}^{-\frac{R\,t}{L}}\,\mathrm{heaviside}(t)$$

Импулсни одзив (Гринова функција, g(t)) се може одредити из
одскочног одзива (индициона функција, f(t))
диференцирањем по времену, g(t) = d/dt f(t).

```
uImpulsniOdziv := diff(uOdskocniOdziv, t)
```

$$\mathrm{e}^{-\frac{R\,t}{L}}\,\delta(t) - \frac{R\,\mathrm{e}^{-\frac{R\,t}{L}}\,\mathrm{heaviside}(t)}{L}$$

На основу става (теореме) за елементарну функцију F(t) следује
F(t)*DiracDelta(t) = F(0+)*DiracDelta(t) .
MuPAD dirac(t) представља јединичну Диракову делта функцију.

```
uImpulsniOdziv | exp(-R*t/L)*dirac(t) = (exp(-R*t/L) | t=0)*dirac(t)
```

$$\delta(t) - \frac{R\,\mathrm{e}^{-\frac{R\,t}{L}}\,\mathrm{heaviside}(t)}{L}$$

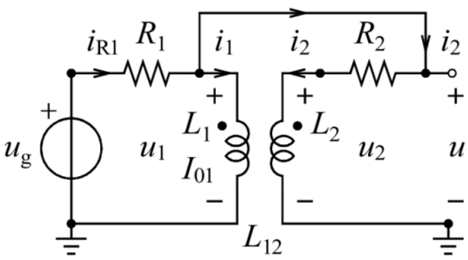
Претходно упрошћавање ради и функција simplify.

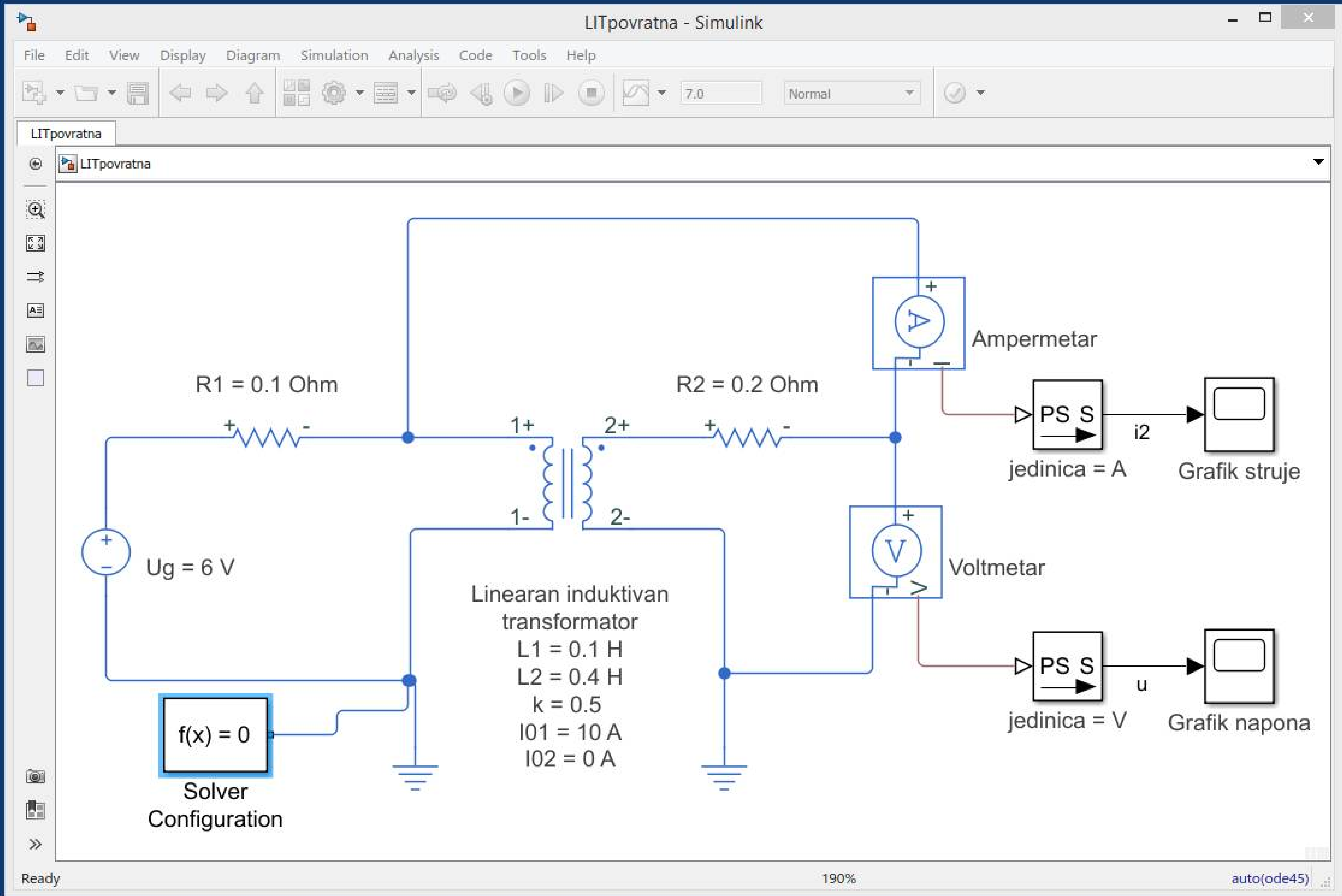
```
simplify(uImpulsniOdziv)
```

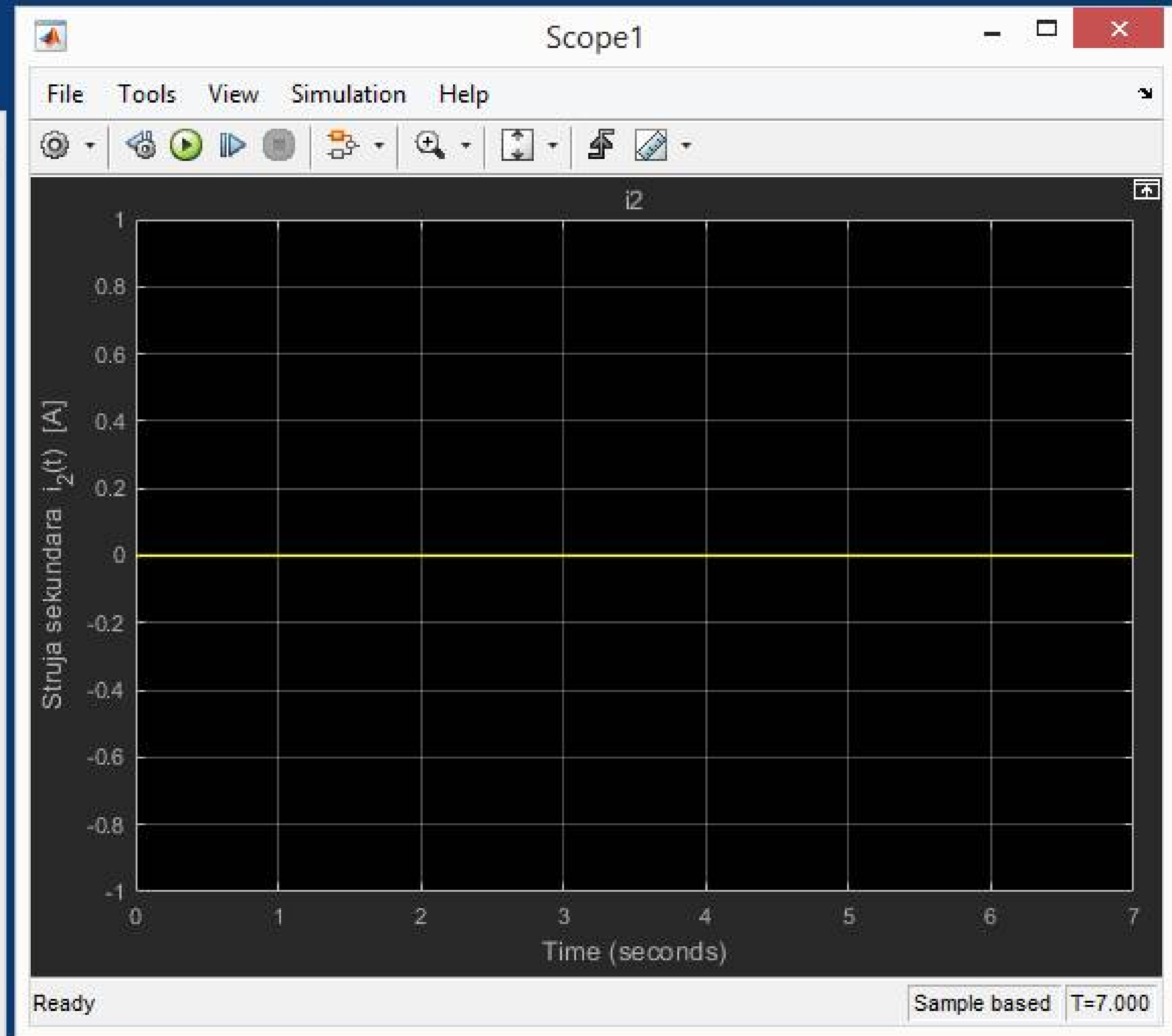
$$\delta(t) - \frac{R\,\mathrm{e}^{-\frac{R\,t}{L}}\,\mathrm{heaviside}(t)}{L}$$

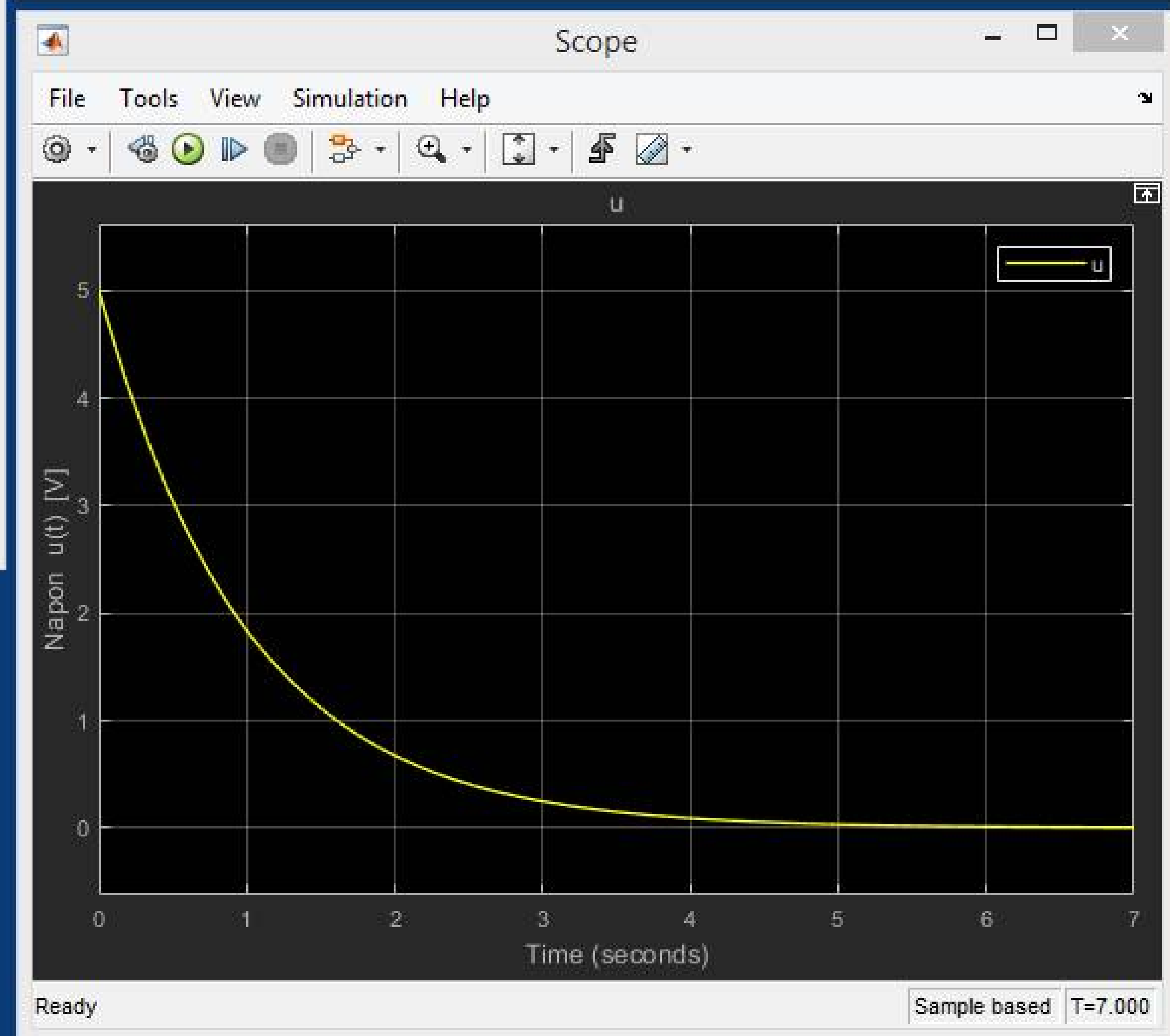
```
version()
```

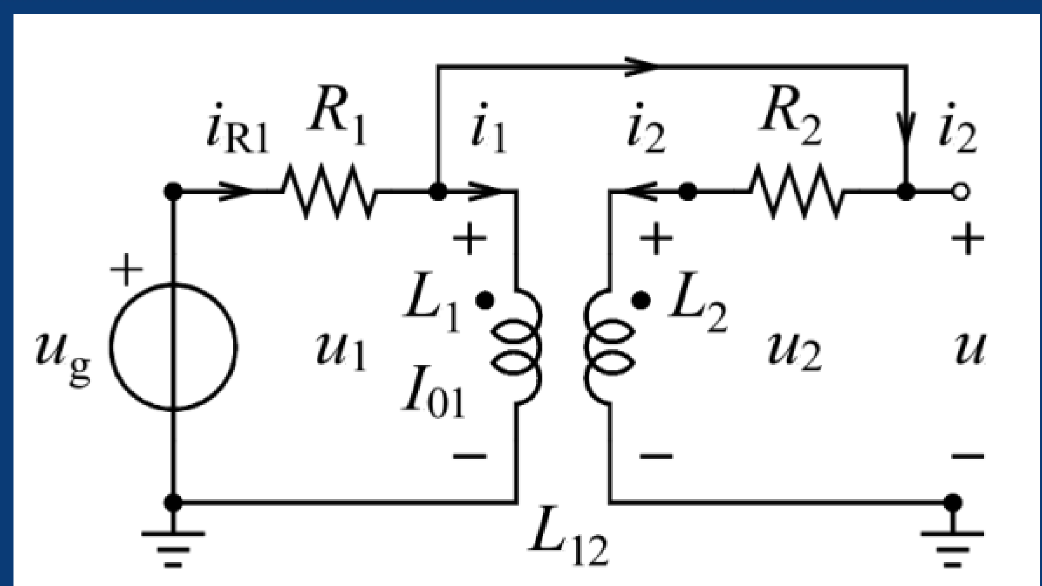
[8, 1, 0]




LITpovratna - Simulink
File Edit View Display Diagram Simulation Analysis Code Tools Help
7.0
Normal
LITpovratna
LITpovratna
R1 = 0.1 Ohm
R2 = 0.2 Ohm
1+
2+
1-
2-
Ampermetar
Voltmetar
Ug = 6 V
Linearan induktivan
transformator
L1 = 0.1 H
L2 = 0.4 H
k = 0.5
I01 = 10 A
I02 = 0 A
PS S
i2
jedinica = A
Grafik struje
PS S
u
jedinica = V
Grafik napona
f(x) = 0
Solver
Configuration
Ready
190%
auto(ode45)


Scope1
File Tools View Simulation Help
i2
Struja sekundara $i_2(t)$ [A]
Time (seconds)
Ready
Sample based
T=7.000


Scope
File Tools View Simulation Help
u
Napon u(t) [V]
Time (seconds)
Ready
Sample based
T=7.000


i_{R1}
R_1
i_1
i_2
R_2
i_2
u_g
u_1
L_1
I_{01}
L_2
u_2
u
L_{12}