

# Butterworth филтар

## трећег реда

Figure 1: Филтар пропусник ниских учестаности

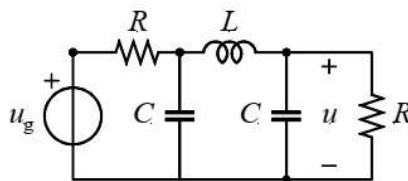
Отпорности отпорника електричног кола са слике су  $R_0 = 1 \Omega$ . Посматра се трансфер функција  $\underline{H}(s) = \underline{U}_g(s) / \underline{U}(s)$ , фреквенцијски одзив  $\underline{H}(j\omega)$  и амплитудска карактеристика  $M(\omega) = |\underline{H}(j\omega)|$ .

- (а) Одредити капацитивност  $C$  и индуктивност  $L$  тако да
- (1) амплитудска карактеристика буде максимално равна у координатном почетку, и
  - (2) амплитудска карактеристика на угаоној учестаности  $\omega = \omega_0 = 1 \text{ rad/s}$  буде  $\sqrt{2}$  пута мања од максималне вредности.

(б) За тако одређене вредности елемената одредити фреквенцијски одзив и амплитудску карактеристику.

(в) Нацртати амплитудску карактеристику из (б) и одредити пропусни опсег 3dB.

Функција је равна у тачки ако су у тачки једнаки нули први извод, други извод, ...



(%i3)  $j$ : %i;  $Z_L$ :  $j \cdot \omega \cdot L$ ;  $Z_C$ :  $1 / (j \cdot \omega \cdot C)$ ;

(%o1) %i

(%o2) %i  $L \omega$

(%o3)  $-\frac{\%i}{C \omega}$

(%i4)  $\text{jednacine: } [(U_1 - U_g) / R + U_1 / Z_C + (U_1 - U_2) / Z_L = 0, \\ (U_2 - U_1) / Z_L + U_2 / Z_C + U_2 / R = 0];$

(%o4)  $[ \frac{\%i C U_1 \omega - \frac{\%i (U_1 - U_2)}{L \omega} + \frac{U_1 - U_g}{R} = 0, \frac{\%i C U_2 \omega - \frac{\%i (U_2 - U_1)}{L \omega} + \frac{U_2}{R} = 0 ]$

(%i5)  $\text{promenljive: } [U_1, U_2];$

(%o5)  $[U_1, U_2]$

```
(%i6) odziv: linsolve(jednachine, promenljive);
```

```
(%o6) [U1 = - 
$$\frac{(\%i C L R U g w^2 + L U g w - \%i R U g)}{\left(C^2 L R^2 w^3 - 2 \%i C L R w^2 + (-2 C R^2 - L) w + 2 \%i R\right)}, U2$$

```

$$= \frac{(\%i R U g)}{\left(C^2 L R^2 w^3 - 2 \%i C L R w^2 + (-2 C R^2 - L) w + 2 \%i R\right)}]$$

```
(%i7) H: ev(U2/Ug, odziv), R=1;
```

```
(%o7) 
$$\frac{\%i}{C^2 L w^3 - 2 \%i C L w^2 + (-L - 2 C) w + 2 \%i}$$

```

```
(%i8) H0: H, w=0;
```

```
(%o8) 
$$\frac{1}{2}$$

```

```
(%i9) assume(C>0, L>0, w>0);
```

```
(%o9) [C>0, L>0, w>0]
```

```
(%i10) M: abs(H);
```

```
(%o10) 
$$\frac{1}{\left|C^2 L w^3 - 2 \%i C L w^2 + (-L - 2 C) w + 2 \%i\right|}$$

```

```
(%i11) P: H·subst(-w,w,H), ratsimp;
```

```
(%o11) 
$$\frac{1}{\left(C^4 L^2 w^6 + (2 C^2 L^2 - 4 C^3 L) w^4 + (L^2 - 4 C L + 4 C^2) w^2 + 4\right)}$$

```

```
(%i12) P0: P, w=0;
```

```
(%o12) 
$$\frac{1}{4}$$

```

```
(%i13) uslov1: P=P0/2, w=1;
```

```
(%o13) 
$$\frac{1}{C^4 L^2 + 2 C^2 L^2 + L^2 - 4 C^3 L - 4 C L + 4 C^2 + 4} = \frac{1}{8}$$

```

```
(%i14) uslov1alt: num(P)=(P0/2)·denom(P), w=1;
```

```
(%o14) 
$$1 = \frac{C^4 L^2 + 2 C^2 L^2 + L^2 - 4 C^3 L - 4 C L + 4 C^2 + 4}{8}$$

```

```
(%i15) P1: diff(P,w);
```

```
(%o15) - 
$$\frac{\left(6 C^4 L^2 w^5 + 4 (2 C^2 L^2 - 4 C^3 L) w^3 + 2 (L^2 - 4 C L + 4 C^2) w\right)}{\left(C^4 L^2 w^6 + (2 C^2 L^2 - 4 C^3 L) w^4 + (L^2 - 4 C L + 4 C^2) w^2 + 4\right)^2}$$

```

```
(%i16) P1, w=0;
```

```
(%o16) 0
```

```
(%i17) P2: diff(P1, w);
```

```
(%o17) 
$$\frac{\left(2 \left(6 C^4 L^2 w^5 + 4 (2 C^2 L^2 - 4 C^3 L) w^3 + 2 (L^2 - 4 C L + 4 C^2) w\right)^2\right)}{\left(C^4 L^2 w^6 + (2 C^2 L^2 - 4 C^3 L) w^4 + (L^2 - 4 C L + 4 C^2) w^2 + 4\right)^3} - \frac{\left(30 C^4 L^2 w^4 + 12 (2 C^2 L^2 - 4 C^3 L) w^2 + 2 (L^2 - 4 C L + 4 C^2)\right)}{\left(C^4 L^2 w^6 + (2 C^2 L^2 - 4 C^3 L) w^4 + (L^2 - 4 C L + 4 C^2) w^2 + 4\right)^2}$$

```

```
(%i18) P2, w=0;
```

```
(%o18) - 
$$\frac{L^2 - 4 C L + 4 C^2}{8}$$

```

```
(%i19) uslov2: P2=0, w=0;
```

```
(%o19) - 
$$\frac{L^2 - 4 C L + 4 C^2}{8} = 0$$

```

```
(%i20) CL: solve([uslov1, uslov2], [C, L]);
```

```
(%o20) [[C = - $\frac{\sqrt{3} \%i - 1}{2}$ , L =  $1 - \sqrt{3} \%i$ ], [C =  $\frac{\sqrt{3} \%i + 1}{2}$ , L =  $\sqrt{3} \%i + 1$ ], [C = -1, L = -2], [C = - $\frac{\sqrt{3} \%i + 1}{2}$ , L =  $-\sqrt{3} \%i - 1$ ], [C =  $\frac{\sqrt{3} \%i - 1}{2}$ , L =  $\sqrt{3} \%i - 1$ ], [C = 1, L = 2]]
```

```
(%i21) ButtCL: CL[6];
```

```
(%o21) [C=1, L=2]
```

```
(%i22) uslov1, ButtCL;
```

```
(%o22) 
$$\frac{1}{8} = \frac{1}{8}$$

```

```
(%i23) uslov2, ButtCL;
```

```
(%o23) 0=0
```

```
(%i24) ButtH: H, ButtCL;
```

```
(%o24) 
$$\frac{\%i}{2 w^3 - 4 \%i w^2 - 4 w + 2 \%i}$$

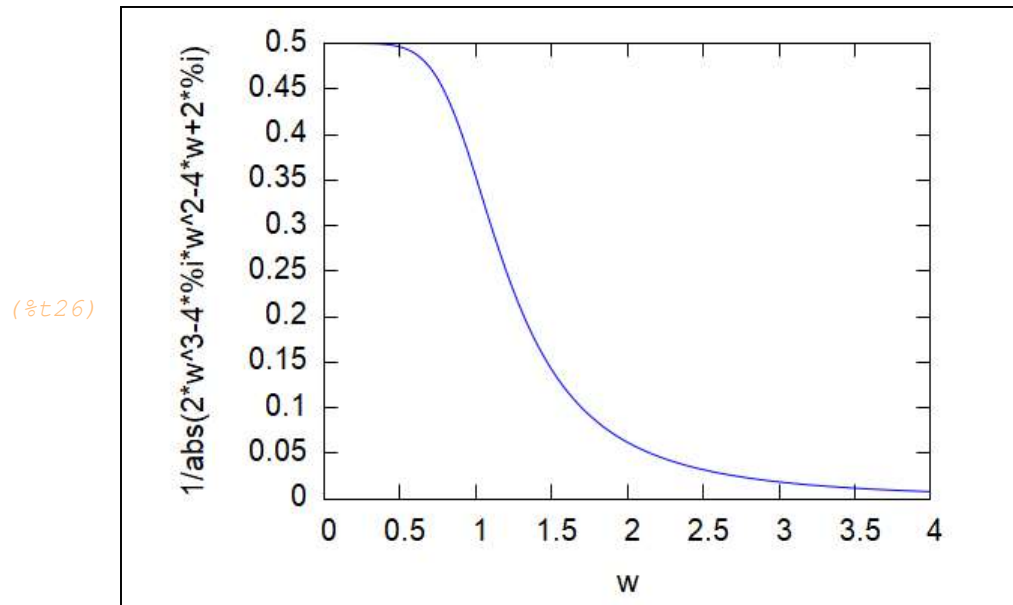
```

```
(%i25) ButtM: M, ButtCL;
```

```
(%o25) 
$$\frac{1}{\left| 2 w^3 - 4 \%i w^2 - 4 w + 2 \%i \right|}$$

```

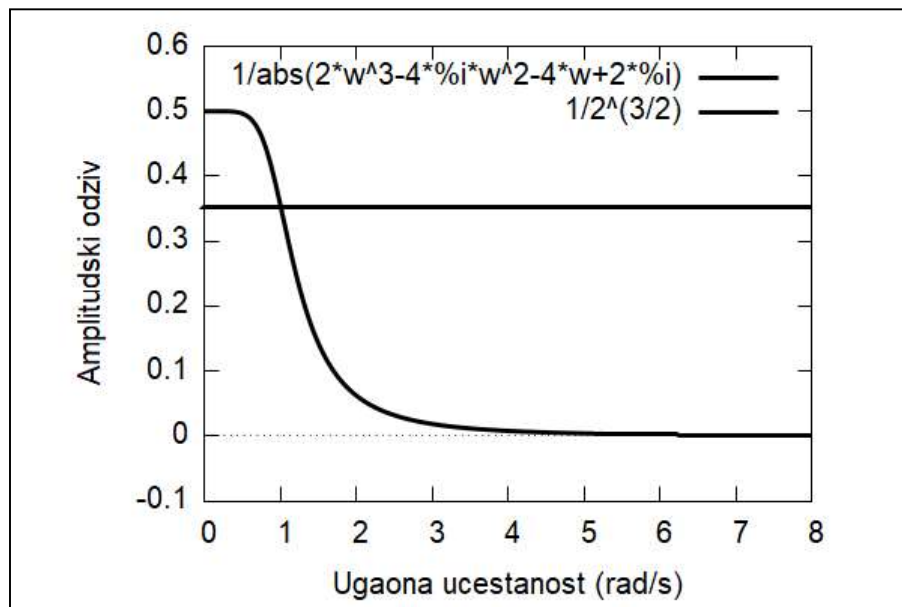
```
(%i26) wxplot2d([ButtM],[w,0,4])$
```



```
(%i29) myPlotPoints: 32 $ myTickness: 3 $ myColour: 5$
```

```
(%i30) wxplot2d([ButtM, (1/2)/sqrt(2)], [w, 0, 8],
[y, -0.1, 0.6],
[xlabel, "Ugaona ucestanost (rad/s)",
ylabel, "Amplitudski odziv",
[nticks,myPlotPoints],
[style, [lines, myTickness, myColor]],
[gnuplot_preamble, "set grid"])]$
```

(%t30)



```
(%i31) wxplot2d(carg(ButtH), [w, 0, 4])$
```

(%t31)

